Tentamen, Kvantfysikens principer
FK2003, 7,5 hp

Tid: 09:00-14:00, fredag 2014-03-21
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, utdelad miniräknare

Var noga med att förklara införda beteckningar och att motivera stegen i dina räkningar. Lösningarna ska vara tydliga och lätta att följa, och det ska klart framgå hur du har tänkt och att du har förstått. **Om inget annat anges i uppgiften, måste du motivera/förklara dina lösningar och svar för att få poäng.**

Maxpoäng är 36 p.
Betygsgränser: F: < 14, Fx: 14, E:18, D: 22, C: 25, B: 31, A: 34

Lycka till!

1.
Beskriv kortfattat följande begrepp (högst ett par meningar):

a) Heisenberg's obestämbarhetsrelation mellan läge och rörelsemängd. (1p)
b) Boson. (1p)
c) Stationärt tillstånd. (1p)
d) Ortogonala bastillstånd. (1p)
e) Paulis uteslutningsprincip. (1p)

2.
En ström av partiklar med spinn S=1 går in i en sekvens av tre Stern-Gerlach apparater. Den mittersta apparaten (T) är roterad i förhållande till de andra två (S). Rita respektive apparat enligt Feynmans notation och ange amplituden ut från den sista om den första (S) blockerar $|0S\rangle$, den sista (S) blockerar $|+S\rangle$ medan den mellersta (T) blockerar $|0T\rangle$. (3p)

3.
En partikel befinner sig i en oändlig (en-dimensionell) potentialgrop med bredden L. Energitillstånden $|n\rangle$ kan inom intervallet $0 \leq x \leq L$ i lägesrepresentationen skrivas som

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_nt/\hbar}$$

Partikeln befinner sig i tillståndet $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$.

a) Beräkna sannolikheten att vid tiden t=0 hitta partikeln i vänstra halvan av lådan. (2p)

b) Sannolikhetstätheten $P(x,t) = |\langle x|\Phi\rangle|^2$ är tidsberoende. Skriv upp uttrycket för denna och ange vid vilka tider sannoliheten att hitta partikeln i den högra halvan är maximal. (2p)

c) En mätning av partikelns energi vid tiden $t = t_0$ gav resultatet E_1. Rita upp tillståndet partikeln befinner sig i för tider $t > t_0$. Motivera! (1p)

4.
En elektrons läge (i x-led) mäts genom att elektronen passerar en spalt med bredden $1 \cdot 10^{-10}$m. Bestäm obestämdheten i elektronens rörelsemängd (i x-led) efter att den passerat spalten. (4p)

5.
Ett dubbelspaltexperimentet med elektroner utförs på tre olika sätt. I det första fallet blockeras det ena hålet, i det andra fallet växlar man och blockerar istället det andra hålet, i det tredje är båda hålen öppna. Elektronerna detekteras sedan på en skärm bortom dubbelspalten.

a) Rita upp och beskriv för vart och ett av fallen sannolikhetsfördelningen man finner då ett stort antal elektroner passerat dubbelspalten. (2p)
b) Med båda spalterna öppna tillför man en ljuskälla som registrerar elektronerna efter spalterna. Rita upp intensitetsfördelningen om ljusets våglängd är så kort att man kan avgöra vilken spalt elektronen passerade. (1p)
c) Samma som i b) men intensiteten på ljuskällan minskas så att inte alla elektroner

registreras. Rita upp och förklara den resulterande intensitetsfördelningen. (2p)

6.

Två partiklar sprids mot varandra, $f(\theta)$ är amplituden för att spridningen sker med vinkeln θ. Antag att man har en detektor som registrerar partiklar som sprids vinkeln θ. Vad är sannolikheten att finna en partikel (vilken som helst) i detektorn om

a) partiklarna är olika? (1p)
b) partiklarna är identiska bosoner? (1p)
c) partiklarna är elektroner med samma spinn? (1p)
d) partiklarna är elektroner med olika spinn? (1p)

(Antag att partiklarnas spinn inte ändras under spridningen).

7.

Antag att vi har ett stort antal partiklar med spinn $s = 3/2$ vilket ger fyra bastillstånd (spinnprojektioner) $|+3/2\rangle, |+1/2\rangle, |-1/2\rangle, |-3/2\rangle$ svarande mot mätvärdena $\frac{3}{2}\hbar$, $\frac{1}{2}\hbar$, $-\frac{1}{2}\hbar$ och $-\frac{3}{2}\hbar$. Partiklarna är alla preparerade i samma tillstånd $|\Psi\rangle$.

a) Bestäm en normerad vågfunktion $|\Psi\rangle$ som beskriver att sannolikheten att få mätresultatet $-\frac{3}{2}\hbar$ är sex gånger så stor som att få $+\frac{3}{2}\hbar$ och tre gånger så stor som att få $-\frac{1}{2}\hbar$. Sannolikheten att få $+\frac{1}{2}\hbar$ är noll. För en normerad vågfunktion $|\Psi\rangle$ gäller $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$. (3p)

b) Beräkna medelvärdet av spinnets projektion för partiklarna. (1p)

c) Antag istället att vågfunktionen ges av

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+3/2\rangle - \frac{1}{2}|+1/2\rangle$$

Hur stor andel av partiklarna passerar då igenom en Stern-Gerlach apparat som bara släpper igenom tillståndet $|\Phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+1/2\rangle + \frac{1}{2}|+3/2\rangle$ (2p)

8.

Antag att en ammoniakmolekyl befinner sig i tillståndet $|1\rangle$ vid tiden $t = 0$ (se formelsamling). Beräkna sannolikheten för att ammoniakmolekylen befinner sig i tillståndet $|1\rangle$ vid tiden t. ($|1\rangle$ är ett av tillstånden där väteatomerna har en fix position relativt kväveatomen). (4p)

Liten Formelsamling

Partiklar – vågor

$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$

$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Kvantformalism

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i$

$\sum_i |C_i|^2 = 1$

$\langle \phi|\chi\rangle = \langle\chi|\phi\rangle^*$

$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ (eller |)

$\langle\chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j}\langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle$

Spinn 1/2

$|+\rangle_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\ |+\rangle_x + |-\rangle_x\ )$

$|-\rangle_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\ -|+\rangle_x + |-\rangle_x\ )$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etc.

Tidsutveckling

$i\hbar\dfrac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}C_j(t)$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$

$C_1(t) = \dfrac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \dfrac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$

$C_2(t) = \dfrac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \dfrac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$

Energitillstånden:

$|I\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\ |1\rangle - |2\rangle\ )$ energi $E_0 + A$

$|II\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\ |1\rangle + |2\rangle\ )$ energi $E_0 - A$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\psi_E(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \le x \le L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}\ , \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Trigonometriska funktioner

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$

Lösningar

Problem 1. Se boken

Problem 2:

$$\underset{S_1}{\left\{\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\}} \quad \underset{T}{\left\{\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\}} \quad \underset{S_2}{\left\{\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\}}$$

Vi får totalt 8 möjliga vägar dvs kombinationer av $\{0,-\}_{S_2}$, $\{+,-\}_T$ och $\left\{\begin{array}{c} + \\ - \end{array}\right\}_{S_1}$ dvs

$$\langle 0 S_2 | +T\rangle\langle +T | +S_1\rangle + \langle 0 S_2 | +T\rangle\langle +T | -S_1\rangle +$$

$$+ \langle 0 S_2 | -T\rangle\langle -T | +S_1\rangle + \langle 0 S_2 | -T\rangle\langle -T | -S_1\rangle +$$

$$+ \langle -S_2 | +T\rangle\langle +T | +S_1\rangle + \langle -S_2 | +T\rangle\langle +T | -S_1\rangle +$$

$$+ \langle -S_2 | -T\rangle\langle -T | +S_1\rangle + \langle -S_2 | -T\rangle\langle -T | -S_1\rangle$$

3a) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left\{\sin\frac{\pi x}{L}\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin\frac{2\pi x}{L}\, e^{-iE_2 t/\hbar}\right\}$

$t=0$: $P\left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{L}\int_0^{L/2}\left\{\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{2\pi x}{L}\right\}^2 dx =$

$$= \frac{1}{L}\int_0^{L/2}\left\{\sin^2\frac{\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L} + 2\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^{L/2}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right) + \cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left[x + \frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{L}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{L}\right]_0^{L/2} = \frac{1}{L}\left\{\frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} + \frac{L}{3\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \approx 0.924$$

b) $P(x,t) = \frac{2}{L}\left\{\sin\frac{\pi x}{L}\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin\frac{2\pi x}{L}\, e^{-iE_2 t/\hbar}\right\}\left\{\sin\frac{\pi x}{L}\, e^{iE_1 t/\hbar} + \sin\frac{2\pi x}{L}\, e^{iE_2 t/\hbar}\right\} =$

$$= \frac{2}{L}\left\{\sin^2\frac{\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L} + \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\left\{e^{i(E_2-E_1)t/\hbar} + e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right\}\right\} =$$

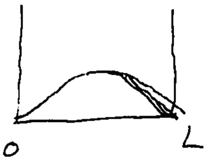
$$= \frac{2}{L}\left\{\sin^2\frac{\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L} + 2\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right]\right\}$$

Vid $t=0$ $\quad P(x,t) = \frac{2}{L}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{2\pi x}{L}\right)^2$ max till vänster

byter tecken då $\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} = (2n+1)\pi$ dvs

$t = \frac{(2n+1)\hbar\pi}{E_2 - E_1}$ och har då max i högra halvan

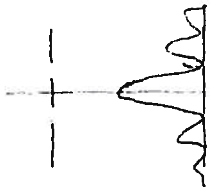
c) Efter mätning av energin med resultatet E_1 befinner sig partikeln i tillståndet $|1\rangle$



4. $\Delta x \approx 1 \cdot 10^{-10}\,m$ $\qquad \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-10}} = 0{,}525 \cdot 10^{-24}\,kg\,m/s$

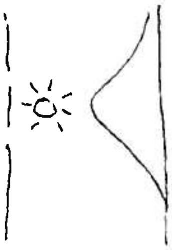
5. a)

Ej interferens



Interferens

b)



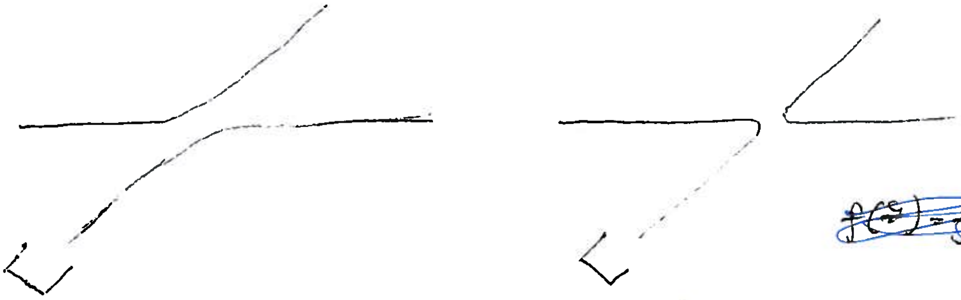
Ej interferens

c)

Ej interferens från registrerade

Interferens från missade

6.



$\cancel{f(\vartheta) = f(\pi - \vartheta)}$

a) $P(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2 + |f(\pi - \vartheta)|^2 = \cancel{2|f(\vartheta)|^2}$ särskiljbara

b) $P(\vartheta) = |f(\vartheta) + f(\pi - \vartheta)|^2 = \cancel{4|f(\vartheta)|^2}$ icke särskiljbara bosoner

c) $P(\vartheta) = |f(\vartheta) - f(\pi - \vartheta)|^2 = \cancel{0}$ — " — fermioner

d) $P(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2 + |f(\pi - \vartheta)|^2 = \cancel{2|f(\vartheta)|^2}$ särskiljbara

7a) $P(-\frac{3}{2}\hbar) = 6 \cdot P(+\frac{3}{2}\hbar)$

$P(-\frac{3}{2}\hbar) = 3 \cdot P(-\frac{1}{2}\hbar)$

$P(+\frac{1}{2}\hbar) = 0$

$|\psi\rangle = a|-\frac{3}{2}\hbar\rangle + b|-\frac{1}{2}\hbar\rangle + c|+\frac{1}{2}\hbar\rangle + d|+\frac{3}{2}\hbar\rangle$

Normering ger $1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$c = 0$ eftersom $P(+\frac{1}{2}\hbar) = 0$

$a^2 = 6d^2 \longrightarrow d^2 = \frac{1}{6}a^2$

$a^2 = 3b^2 \longrightarrow b^2 = \frac{1}{3}a^2$

$1 = a^2 + \frac{1}{3}a^2 + 0 + \frac{1}{6}a^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{6+2+1}{6}a^2 =$

$= \frac{3}{2}a^2 \rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$d = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot a = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$|\psi\rangle = \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right| |-\frac{3}{2}\hbar\rangle + \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right| |-\frac{1}{2}\hbar\rangle + \left|\frac{1}{3}\right| |+\frac{3}{2}\hbar\rangle$

Tecknen (faserna) är inte bestämda

b) $\langle S_z\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\left(-\frac{3}{2}\hbar\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\hbar\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(+\frac{3}{2}\hbar\right) =$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\hbar\right) + \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\hbar\right) + \frac{1}{9}\left(+\frac{3}{2}\hbar\right) =$

$= \hbar\left\{-1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right\} = \left\{\frac{-18 - 2 + 3}{18}\right\}\hbar = -\frac{17}{18}\hbar$

c) $\langle\Phi|\psi\rangle = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\langle +\tfrac{1}{2}| + \frac{1}{2}\langle +\tfrac{3}{2}|\right\}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}|+\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{2}|+\tfrac{1}{2}\rangle\right\} =$

$= \frac{3}{4}\underbrace{\langle +\tfrac{1}{2}|+\tfrac{3}{2}\rangle}_{=0} - \frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{\langle +\tfrac{1}{2}|+\tfrac{1}{2}\rangle}_{=1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{\langle +\tfrac{3}{2}|+\tfrac{3}{2}\rangle}_{=1} - \frac{1}{4}\underbrace{\langle +\tfrac{3}{2}|+\tfrac{1}{2}\rangle}_{=0}$

$= 0$

8. $t=0$: $|1\rangle$

$$|\Phi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle = |1\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} = 1 \quad \text{for } t=0$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} = 0 \quad \text{for } t=0$$

$\therefore$
$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a=1, \quad b=1$$

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a=b$$

$\therefore$ ~~$|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{2}$~~ $C_1(t) = \frac{1}{2}\left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \right\}$

$$P(|1\rangle) = |C_1(t)|^2 = \frac{1}{4}\left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \right\}\left\{ e^{\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + e^{\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ 2 + e^{2iAt/\hbar} + e^{-2iAt/\hbar} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 1 + \cos\left(\frac{2At}{\hbar}\right) \right\}$$