



Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

18 mars 2005

9-15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.

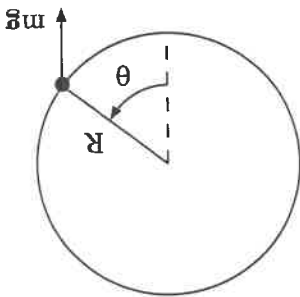
Skriv namn på alla blad!

Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En partikel med massa m rör sig friktionsfritt på en cirkel med radie R i vertikallplanet under inverkan av gravitationen (plan matematisk pendel).

- a) Sätt upp Hamiltonfunktionen och Hamiltons kanoniska ekvationer. Lös sedan rörelsen för små utslagsvinklar. (3p)

- b) Definiera fasrummet, $\mathbf{P}$, och skissera hur lösningskurvorna ser ut för allmänna utslagsvinklar. (2p)



2. En homogen boll med radie R kan rulla utför ett sluttande plan med lutningsvinkeln α (se figur a) till höger).

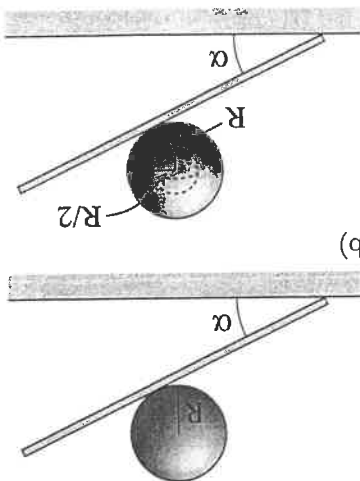
- a) Visa att accelerationen längs med planet ges av

$$\ddot{x} = \frac{7}{5}g \sin \alpha$$

- der g är tyngdaccelerationen. (2p)

- b) Betrakta nu en homogen boll med ett sfäriskt hål i centrum (se figur b) till höger). Det sfäriska hålet har radie $R/2$. Hur stor blir accelerationen för denna boll när den rullar utför planet? Uttryck svaret som hur stor andel av acceleration i a) denna ihåliga boll får. Verkar svaret rimligt? (3p)

Bollarna kan antas röra sig endast i en dimension, rakt ner för planet (dvs de rör sig i figurens plan). De rullar också utan att glida (och utan rullmotstånd).



Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på <http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html>.

Lycka till!

- a) Ansätt att $\Psi(q, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar} S^*(q, t)}$ (med $A = \text{konstant}$) och tag fram en ekvation som liknar Hamilton-Jacobis ekvation så mycket som möjligt. Hur kan $S^*(q, t)$ tolkas? (3p)
- b) I vilken gräns blir ekvationen som härleddes i a) identisk med Hamilton-Jacobis ekvation? Försök att diskutera/tolka ditt svar. (2p)

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad ; \quad \dot{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$$

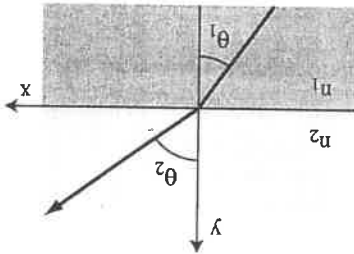
med

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

5. Utgå från Schrödingerekvationen för en partikel med massan m i en dimension ska anta ett extremvärde.

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} n(y) \frac{c}{n(y)} ds = \int_{x_1}^{x_2} n(y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ledning: Med koordinatsystem enligt figur kan Fermats princip uttryckas som att funktionalen



- b) Betrakta nu Fermats princip som säger att ljusstrålar tar den väg som går snabbast och visa Snells brytningslag, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ där n_1 och n_2 är brytningsindex i de två materialen. (3p)

Denna ekvation kallas ibland för variationsproblemets första integral.

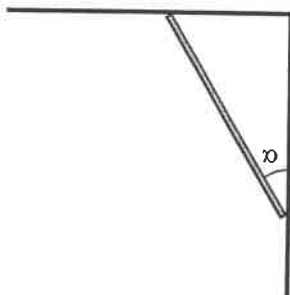
$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d} - \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

- a) Visa att Euler-ekvationen ovan är ekvivalent med

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

är uppfyllt.

4. Funktionalen $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ antar ett extremvärde då variationsproblemets Euler-ekvation



- a) Tag fram rörelseekvationerna för stegens rörelse så länge den är i kontakt med väggen. (3p)
- b) Kommer stegen under fallet att förlora kontakten med väggen? Om så är fallet, vid vilken vinkel sker detta? (2p)

3. En stegen står på en altan lutad mot en nyoljad vägg (mot vilken friktionen är försumbar) med lutningsvinkeln α (se figur). Det börjar plötsligt att regna, varvid friktionen mellan stegen och altanen försvinner. Stegen börjar då glida ner mot altanen under inverkan av gravitationen. Stegen har längden l , massan m och kan approximeras med en tunn homogen rektangulär skiva.

Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 3 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.



Formelsamling

Analytisk Mekanik, 5p

Kanoniska transformationer

- Typ A. $\Phi = \Phi(\tilde{q}, \tilde{Q}, t)$ - genererande funktion
 $p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{q}_i}$; $P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{Q}_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
 $q_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{P}_i}$; $P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{Q}_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
- Typ B. $S = S(\tilde{q}, \tilde{P}, t)$ - genererande funktion
 $p_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i}$; $Q_j = \frac{\partial S}{\partial \tilde{P}_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$
 $q_i = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{P}_i}$; $Q_j = \frac{\partial S}{\partial \tilde{P}_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$
- Typ D. $V = V(\tilde{P}, \tilde{p}, t)$ - genererande funktion

Noethers teorem
 Om Lagrangefunktionen $L(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformations-
 tionen $\tilde{q} \rightarrow \tilde{h}_s(\tilde{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $\tilde{h}_{s=0}(\tilde{q}) = \tilde{q}$ är identitetstrans-
 formationen så är

$$I(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial s} \bigg|_{s=0} h'_s(\tilde{q})$$

en rörelsekonstant.

Eulers dynamiska ekvationer

I ett principalsystem K fixt i kroppen har vi

$$\begin{cases} \dot{N}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{yz}\dot{\omega}_y - I_{zy}\dot{\omega}_z) \\ \dot{N}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xz}\dot{\omega}_x - I_{zx}\dot{\omega}_z) \\ \dot{N}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{xy}\dot{\omega}_x - I_{yx}\dot{\omega}_y) \end{cases}$$



Lösningar till Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p 18 mars 2005

Lösningar finns även tillgängliga på
<http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html>.

Uppgift 1

a) Välj θ som vår generaliserade koordinat. Hastigheten ges då av $v = R\dot{\theta}$ och höjden över det nedre jämviktsläget är $z = R(1 - \cos \theta)$. Lagrangefunktionen ges då av

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR(1 - \cos \theta)$$

Den kanoniska impulsen ges av

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

och vi kan nu skriva Hamiltonfunktionen som

$$H(\theta, p_{\theta}) = \dot{\theta}p_{\theta} - L = \frac{p_{\theta}^2}{2mR^2} - \frac{mR^2}{2} \left(\frac{p_{\theta}}{mR^2} \right)^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{p_{\theta}^2}{2mR^2} + mgR(1 - \cos \theta)$$

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgR \sin \theta \\ \dot{p}_{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = -\frac{p_{\theta}}{mR^2} \end{cases}$$

För små svängningar kan vi sätta $\sin \theta \approx \theta$,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgR \theta \\ \dot{p}_{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = -\frac{p_{\theta}}{mR^2} \end{cases}$$

Derivera den andra ekvationen med avseende på tiden och sätt in uttrycket för θ från den första ekvationen så får vi

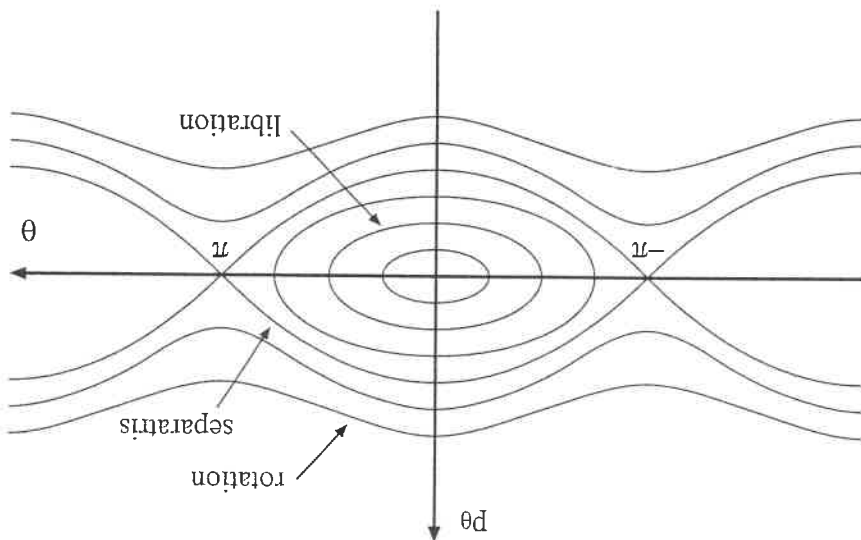
$$\ddot{p}_{\theta} = -mgR\dot{\theta} = -\frac{g}{R}p_{\theta}$$

Denna löses enkelt och vi får lösningen

$$\begin{cases} p_{\theta} = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t + \theta_0 \right) \\ \theta = \frac{mR\sqrt{g}R}{A} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t + \theta_0 \right) \end{cases}$$

Uppgift 2

För små utslagsvinklar är lösningskurvorna (nästan) elliptiska. För så stora utslagsvinklar att pendeln slår över har vi rotation. När rörelsen är precis så att pendeln kan nå upp till översta punkten med hastigheten noll så behövs vi oss mitt emellan och den kurvan kallas för separatrix.



b) Fasrummet, P , spåns upp av $\{\theta, p_\theta\}$ och för allmänna utslagsvinklar har vi följande fasporträtt:

a) Problemet har en frihetsgrad och vi kan välja läget längs med planet som vår generaliserade koordinat. Låt oss kalla denna x enligt figur. Den kinetiska energin består av två delar,

$$T = T_S + T_{\text{rot}}$$

där T_S är translationsenergin för masscentrums rörelse och T_{rot} är rotationsenergin för rotationen kring masscentrum.

T_S ges av

$$T_S = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

där M är massan hos bollen. Rotationsenergin ges av

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

där I är tröghetsmomentet för rotation kring rotationsaxeln (eftersom bollen är sfäriskt symmetrisk är alla tröghetsmoment lika). Vi har också utnyttjat att vinkelhastigheten ges av $\dot{x}/R$. Potentiälen från gravitationsfältet ges av

$$U = -Mgx \sin \alpha$$

Accelerationen för den ihåliga bollen är således $\frac{101}{98}$ av accelerationen för den homogena bollen.

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_{ny}} = \frac{\frac{101}{98}}{\frac{70}{98}} = \frac{101}{70}$$

bollen blir då slutligen

Kvoten mellan den nya accelerationen för den ihåliga bollen och den tidigare för den homogena

$$\ddot{x}_{ny} = \frac{1 + \frac{M_{ny} R^2}{I}}{g \sin \alpha} = \frac{1 + \frac{\frac{80}{31} M R^2}{\frac{31}{80} M R^2}}{g \sin \alpha} = \frac{8 \frac{8}{7} + \frac{80}{31}}{7 g \sin \alpha} = \frac{101}{70} g \sin \alpha$$

accelerationen för den ihåliga bollen

där vi har utnyttjat att den borttagna massan för hålet är $M/8$. Insatt i ekv. (1) ger oss detta

$$I_{ny} = \frac{5}{2} M R^2 - \frac{5}{2} M \left(\frac{R}{2} \right)^2 = M R^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{80} \right) = \frac{31}{80} M R^2$$

boll

$R/2$ (eftersom tröghetsmomentet för en homogen boll med radie R och dra bort tröghetsmomentet för en homogen boll med radie $R/2$) Vi får då vårt nya tröghetsmoment för vår ihåliga

För att beräkna tröghetsmomentet för denna ihåliga boll kan vi ta tröghetsmomentet för en

$$M_{ny} = \frac{\frac{3}{4} \pi R^3 - \frac{3}{4} \pi (R/2)^3}{R^3 - (R/2)^3} M = \frac{\frac{3}{4} \pi R^3}{R^3} M = \frac{8}{7} M$$

b) Vi har nu istället en boll med ett hål i mitten. Vi kan antingen betrakta denna boll som en boll med samma massa som i a) men med ett hål i mitten (dvs en boll med högre densitet), eller så kan vi betrakta denna boll som bollen i a) men med mitten borttagen (dvs en något lättare boll). Villket vi gör spelar ingen roll då accelerationen inte beror av den totala massan (i ekv. (1) är $I \propto M$ vilket ger att $\ddot{x}$ ej beror av massan). Låt oss betrakta denna boll som samma boll som i a) men med ett hål i mitten. Massan på denna ihåliga boll är då

vilket är vad som skulle visas.

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{\frac{5}{2}} = \frac{1 + \frac{5}{2}}{5} g \sin \alpha \quad (2)$$

Insatt i ekv. (1) ger detta oss

$$I = \frac{5}{2} M R^2$$

valfri axel) av

För en homogen boll med radie R och massan M ges tröghetsmomentet (för rotation runt

$$(1) \quad M \ddot{x} \left(1 + \frac{M R^2}{I} \right) - M g \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{1 + \frac{M R^2}{I}}{g \sin \alpha}$$

Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, ger oss rörelseekvationen

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \left(1 + \frac{M R^2}{I} \right) + M g x \sin \alpha$$

och vi får då vår Lagrangefunktion

Uppgift 3

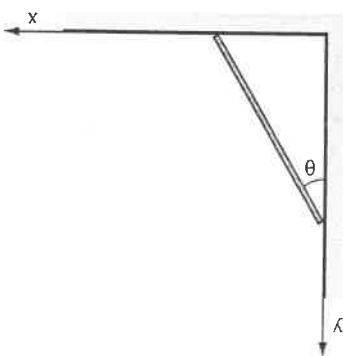
Eftersom den ihålliga bollen har massan (m) genomsnitt) placerad längre ut från rotationsaxeln så har den ett högre tröghetsmoment för en given massa på bollen. Det innebär att rotationsenergin kommer att bli större (för en given vinkelhastighet). Detta i sin tur leder till att den ihålliga bollen kommer att vara "mer trög" att få fart på. Den borde därför accelerera långsammare, vilket vi också finner.

a) Problemet har en frihetsgrad och vi väljer vinkeln θ mellan stegen och väggens som generaliserad koordinat. Inför också kartesiska koordinater x och y för stegens masscentrum. Följande relation mellan θ och våra kartesiska koordinater gäller:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{l} \sin \theta \\ y = \frac{2}{l} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{l} \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = -\frac{2}{l} \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

Vi kan då skriva upp den kinetiska energin för stegen som

$$T = T_s + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{4}{l^2} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{4}{l^2} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 = \frac{2}{l^2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$



Den potentiella energin ges av

$$U = mgy = \frac{2}{l} mgl \cos \theta$$

vilket ger oss vår Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 - \frac{2}{l} mgl \cos \theta$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen blir

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \dot{\theta} = -\frac{2}{l} mgl \sin \theta \\ \ddot{\theta} = -\frac{2}{l} g \sin \theta \end{cases}$$

Lagrangies ekvationer, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, ger oss nu rörelseekvationerna,

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{l} g \sin \theta \quad (3)$$

b) Stegen förlorar kontakten med väggen då accelerationen i x -led är noll ty då är kraften från väggen noll enligt Newtons andra lag. Accelerationen i x -led ges av

$$\ddot{x} = -\frac{2}{l} \sin \theta \ddot{\theta} + \frac{2}{l} \cos \theta \dot{\theta}^2$$

Från rörelseekvationerna, Ekv. (3) känner vi $\ddot{\theta}$ som funktion av θ , men vi behöver också $\dot{\theta}^2$ som funktion av θ . Detta kan vi antingen få genom att sätta upp den totala energin och

Uppgift 4

konstaterar att den är bevarad, men vi kan också få θ^2 från rörelseekvationerna, Ekv. (3), genom att multiplicera dessa med θ och integrera med avseende på tiden,

$$\frac{ml^2}{2} \ddot{\theta} \theta - \frac{mgl}{2} \sin \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2} \cos \theta = A$$

där konstanten A bestäms från begynnelsevillkoren $\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \alpha$, vilket ger $A = \frac{mgl}{2} \cos \alpha$. Vi kan då skriva vårt uttryck för $\dot{x}$ som

$$\dot{x} = -\frac{l}{2} \sin \theta \left[\frac{3g}{2} \cos \alpha - \frac{l}{2} \cos \theta \right] + \frac{l}{2} \cos \theta \left[\frac{3g}{2} \sin \theta \right] = \left[\frac{4}{9} \cos \theta - \frac{2}{3} \cos \alpha \right] g \sin \theta$$

villket är noll då

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \cos \alpha \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{2}{3} \cos \alpha \right)$$

d v s detta är den vinkel vid vilken stegen förlorar kontakten med väggen.

a) Funktionalen $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ antar ett extremvärde då variationsproblemets Euler-

ekvation

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

är uppfyllt. Vi vill visa att Euler-ekvationen ovan är ekvivalent med

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Denna ekvation kallas ibland för variationsproblemets första integral.

Enklaste sättet att visa att de två uttrycken är ekvivalenta är att ta det andra uttrycket, utföra derivatorna och se att vi då erhåller Euler-ekvationen. Låt oss göra detta. Kom dock ihåg att $f = f(x, y, y')$ så när vi utför den totala derivatan $\frac{d}{dx}$ får vi många inre derivator enligt kedjeregeln. Vi får då

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial f}{\partial x} - \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)' = \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial y'} = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \end{aligned}$$

Euler-ekvationen

= 0 enligt

Ekv (5) följer alltså från Euler-ekvationen, ekv. (4). Vi har då visat ena riktningen av ekvivalensen. Eftersom den triviala lösningen $y' \equiv 0$ ej kan gälla för generella lösningar till variationsproblemet kan vi sluta oss till att Euler-ekvationen följer från ekv. (5). Vi har då visat att de två ekvationerna är ekvivalenta.

b) Enklast är att skriva funktionalen på formen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{c}{n(y)} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{c}{n(y)} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{\left[\varepsilon\left(\frac{b\varrho}{*S\varrho}\right)\frac{\mathfrak{y}}{?}+\frac{\varepsilon b\varrho}{*S\varepsilon\varrho}\right]\frac{\mathfrak{y}}{?}} &= \left[\mathfrak{H}_{\varepsilon}\frac{b\varrho}{*S\varrho}+\mathfrak{H}_{\varepsilon\varepsilon\varrho}\frac{\varepsilon b\varrho}{*S\varepsilon\varrho}\right]\frac{\mathfrak{y}}{?}=\frac{\varepsilon b\varrho}{\mathfrak{H}_{\varepsilon\varrho}} \\ \mathfrak{H}_{\frac{b\varrho}{*S\varrho}\frac{\mathfrak{y}}{?}} &=_{(\varepsilon^b)*S\frac{\mathfrak{y}}{?}\partial V}\frac{b\varrho}{*S\varrho}\frac{\mathfrak{y}}{?}=\frac{b\varrho}{\mathfrak{H}\varrho} \\ \mathfrak{H}_{\frac{\mathfrak{y}\varrho}{*S\varrho}\frac{\mathfrak{y}}{?}} &=_{(\varepsilon^b)*S\frac{\mathfrak{y}}{?}\partial V}\frac{\mathfrak{y}\varrho}{*S\varrho}\frac{\mathfrak{y}}{?}=\frac{\mathfrak{y}\varrho}{\mathfrak{H}\varrho} \end{aligned}$$

$$\Psi(q, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar} S^*(q, t)}; \quad A = \text{konstant.} \quad (7)$$

Uppgift 5

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Detta ska gälla för hela färden¹ och då i symmetri i gränsen mellan de två olika materialen.

$$n(y) \sin \theta = \text{konst.}$$

$$\text{konst.} = \frac{n(y)}{I} \frac{c}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{n(y)}{I} \frac{c}{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}} = \frac{n(y)}{I} \frac{c}{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta}} = \frac{n(y)}{I} \frac{c}{1} \sin \theta$$
$$(9) \quad \frac{c}{1} \frac{\sqrt{z/\tilde{h} + 1}}{\tilde{h}} u(\tilde{h}) = \left[\frac{c}{z/\tilde{h} + 1} \frac{\sqrt{z/\tilde{h} + 1}}{\tilde{h}} - \frac{c}{z/\tilde{h} + 1} \frac{\sqrt{z/\tilde{h} + 1}}{\tilde{h}} \right] u(\tilde{h}) = \text{konst.}$$
$$\Leftrightarrow f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{konst.}$$

$$\left(\frac{f_{\varrho}}{f_{\varrho}}, f - f\right) \frac{xp}{p} - 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \bigg|_{\pi^{-1}(h) + 1} = (\pi^{-1}(h))f = (\pi^{-1}(h), x)f$$

Vår funktion f ges då av

Sätt in dessa derivator i Schrödinger ekvationen och vi erhåller

$$(8) \quad \left[\left[\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial S^*} \right] \left(\frac{\partial q}{\partial S^*} \right) + U \right] \frac{\partial}{\partial S^*} \Psi = \Psi \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial S^{*2}} \right] \Psi$$

Ψ kan vi dividera bort och ekv. (8) kan då skrivas

$$(9) \quad \left[\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial S^*} \right] \left(\frac{\partial q}{\partial S^*} \right) + U \left[\frac{\partial}{\partial S^*} \right] = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial S^{*2}}$$

Vänsterledet känner vi igen som vår nya Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ om vi identifierar $S^*(q, t)$ med verkanfunktion. Den nya Hamiltonfunktionen ska ju dock vara noll, men högerledet i ekv. (9) är skilt från noll.

b) Högerledet i ekv. (9) kan försummas om

$$(10) \quad \hbar \frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} \gg \left(\frac{\partial q}{\partial S^*} \right)^2$$

Vi skriver nu om detta uttryck så att det blir tydligare när det är uppfyllt. Eftersom $p = \frac{\partial q}{\partial S^*}$ kan vi skriva ekv. (10) som

$$\hbar \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} \gg p^2$$

Utnyttja nu att deBroglie-våglängden är given av

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{2\pi\hbar}$$

vilket ger att villkoret skrivas

$$\frac{d/\lambda}{(\partial p / \partial q)} \ll 2\pi.$$

Dvs när våglängden är så liten att rörelsemängden ändras försumbart lite över en våglängd, då kan vi försumma högerledet i ekv. (9) och vi erhåller vår klassiska Hamilton-Jacobis ekvation. Notera att vi också kan erhålla den klassiska gränsen, i detta fall Hamilton-Jacobis ekvation, genom att låta $\hbar \rightarrow 0$, dvs genom att försumma kvantiseringen av verkan.



Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physsto.se

Formelsamling

Analytisk Mekanik, 5p

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\tilde{q}, \tilde{Q}, t)$ - genererande funktion
 $p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$; $P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
 $q_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$; $P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Typ C. $U = U(\tilde{Q}, \tilde{p}, t)$ - genererande funktion
 $p_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$; $P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$
 $q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i}$; $Q_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$

Typ D. $V = V(\tilde{P}, \tilde{p}, t)$ - genererande funktion
 $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$; $Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$
 $q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i}$; $Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j}$; $\tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$

Noethers teorem

Om Lagrangefunktionen $L(\tilde{q}, \tilde{q})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformations $\tilde{q} \rightarrow \tilde{h}^s(\tilde{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $\tilde{h}_{s=0}(\tilde{q}) = \tilde{q}$ är identitetstransformationen så är

$$I(\tilde{q}, \tilde{q}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} \tilde{h}_i^s(\tilde{q}) \bigg|_{s=0}$$

en rörelsekonstant.

Eulers dynamiska ekvationer

I ett principalsystem K fixt i kroppen har vi

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{N}_x &= I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{yz} - I_{zy}) \dot{\omega}_y + I_{zz} \dot{\omega}_z \\ \dot{N}_y &= I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{zx} - I_{xz}) \dot{\omega}_z + I_{zz} \dot{\omega}_x \\ \dot{N}_z &= I_{zz} \dot{\omega}_z + (I_{xy} - I_{yx}) \dot{\omega}_x + I_{xx} \dot{\omega}_y \end{aligned} \right.$$



Collection of formulae Analytical Mechanics, 5p

Canonical transformations

- Class A.** $\Phi = \Phi(\tilde{q}, \tilde{Q}, t)$ - generating function
 $p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} ; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
- Class C.** $U = U(\tilde{Q}, \tilde{p}, t)$ - generating function
 $q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} ; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$
- Class B.** $S = S(\tilde{q}, \tilde{P}, t)$ - generating function
 $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} ; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$
- Class D.** $V = V(\tilde{P}, \tilde{p}, t)$ - generating function
 $q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} ; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$

Noether's theorem

If the Lagrangian $L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ describes an autonomous system which is invariant under the transformation $\tilde{q} \rightarrow \tilde{h}_s(\tilde{q})$ where s is a real continuous parameter such that $\tilde{h}_{s=0}(\tilde{q}) = \tilde{q}$ is the identity transformation, then

$$I(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \bigg|_{\tilde{q}} \bigg|_{s=0}$$

is a constant of motion.

Euler's dynamical equations

In a principal system K fixed in the body we have

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{N}_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xz}\dot{\omega}_z - I_{yz}\dot{\omega}_y \\ \dot{N}_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yx}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_z \\ \dot{N}_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + I_{zx}\dot{\omega}_x - I_{zy}\dot{\omega}_y \end{aligned} \right.$$