Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

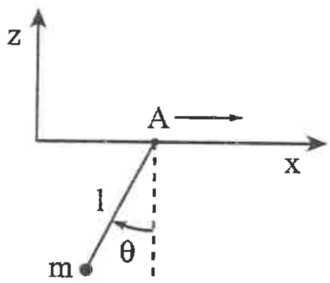
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

23 augusti 2002

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En plan matematisk pendel med massan m och snörlängden l (snörets massa kan försummas) är fäst i en punkt A (se figur) och påverkas av tyngdaccelerationen g nedåt i figuren. Punkten A accelererar med accelerationen g i horisontalplanet.



a) Tag fram rörelseekvationen för pendelns rörelse. (2p)

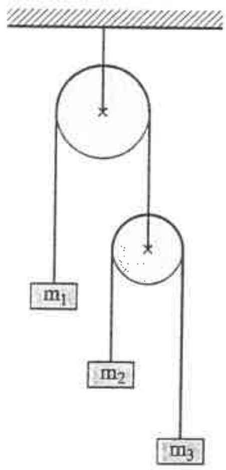
b) För en vanlig pendel där punkten A är i vila beskriver pendeln oscillationer runt $\theta = 0$. Runt vilken vinkel θ_0 beskriver denna pendel med accelererande A oscillationer? (1p)

c) Lös rörelseekvationen för små utslag kring denna jämviktsvinkel och jämför med en vanlig plan pendel med punkten A i vila. (2p)

2. Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra denna uppgift utan får tillgodoräkna dig den ändå.

En dubbel Atwood-maskin (se figur) består av tre massor m_1, m_2 och m_3 förbundna med masslösa trådar. Trådarna löper i sin tur över två masslösa trissor som kan rotera friktionsfritt runt sina symmetriaxlar. Massorna påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren.

Sätt upp rörelseekvationerna för systemet och lös dessa. Rörelsen för de tre massorna kan antas ske helt vertikalt. (5p)



3. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Visa att en genererande funktion $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

4. Betrakta en stel kropp vars tröghetstensor i dess principalsystem ges av

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \neq I_1 < I_2 < I_3$$

a) Om kroppen inte utsätts för några externa vridmoment och den sätts i rotation runt en av principalaxlarna (x-, y- eller z-axeln i detta fall) kommer rotationen att fortsätta ske runt denna axel. Visa detta! (2p)

b) Om rotationen i a) utsätts för en liten störning är rotationen stabil (d v s rotationen fortsätter att i huvudsak ske runt den ursprungliga axeln) om den sker runt den axel som har minst eller störst tröghetsmoment, medan den är labil om rotationen sker runt axeln med det mellersta tröghetsmomentet. Visa detta! (3p)

5. Betrakta ett system med f frihetsgrader som beskrivs av en Lagrangefunktion $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ utan explicit tidsberoende.

a) Visa att Hamiltonfunktionen för detta system är bevarad, d v s att $\frac{dH}{dt} = 0$. (2p)

b) Antag vidare att L är given på den naturliga formen

$$L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = T(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) - U(\underset{\sim}{q})$$

där T är den kinetiska och U den potentiella energin (som i detta fall ej beror av $\dot{\underset{\sim}{q}}$). Visa att om T är en homogen funktion av grad 2 i $\dot{\underset{\sim}{q}}$, d v s om

$$T = \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} c_{jk}(\underset{\sim}{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

så ges Hamiltonfunktionen av $H = T + U$, d v s den är lika med den totala energin. (3p)

Ledning: Det kan vara praktiskt att först visa Eulers teorem för en homogen funktion av grad 2,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.

Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Formelsamling

Analytisk Mekanik, 5p

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Noethers teorem

Om Lagrangefunktionen $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen $\underset{\sim}{q} \to h^s(\underset{\sim}{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $h^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen så är

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h^s(q_i) \bigg|_{s=0}$$

en rörelsekonstant.

Eulers dynamiska ekvationer

I ett principalsystem $\bar{K}$ fixt i kroppen har vi

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{N}_x & = & I_{xx}\dot{\bar{\omega}}_x + (I_{zz} - I_{yy})\bar{\omega}_y\bar{\omega}_z \\ \bar{N}_y & = & I_{yy}\dot{\bar{\omega}}_y + (I_{xx} - I_{zz})\bar{\omega}_z\bar{\omega}_x \\ \bar{N}_z & = & I_{zz}\dot{\bar{\omega}}_z + (I_{yy} - I_{xx})\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y \end{array} \right.$$

Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Collection of formulae

Analytical Mechanics, 5p

Canonical transformations

Class A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - generating function

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Class B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - generating function

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Class C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - generating function

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Class D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - generating function

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Noether's theorem

If the Lagrangian $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ describes an autonomous system which is invariant under the transformation $\underset{\sim}{q} \to h^s(\underset{\sim}{q})$ where s is a real continuous parameter such that $h^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ is the identity transformation, then

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h^s(q_i) \bigg|_{s=0}$$

is a constant of motion.

Euler's dynamical equations

In a principal system $\bar{K}$ fixed in the body we have

$$\begin{cases} \bar{N}_x = I_{xx}\dot{\bar{\omega}}_x + (I_{zz} - I_{yy})\bar{\omega}_y\bar{\omega}_z \\ \bar{N}_y = I_{yy}\dot{\bar{\omega}}_y + (I_{xx} - I_{zz})\bar{\omega}_z\bar{\omega}_x \\ \bar{N}_z = I_{zz}\dot{\bar{\omega}}_z + (I_{yy} - I_{xx})\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y \end{cases}$$

Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

23 augusti 2002

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Pendeln kan röra sig i två dimensioner, dels rör sig upphängningspunkten A längs med x-axeln och dels pendlar själva pendeln i vertikalplanet. Upphängningspunktens rörelse är dock given och kan därför betraktas som ett externt tvång. Vi har därför en frihetsgrad och väljer utslagsvinkeln θ som vår generaliserade koordinat. För upphängningspunkten As rörelse gäller att

$$\ddot{x} = g \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = gt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}gt^2$$

där integrationskonstanterna har valts till 0.

Massan ms hastighet kan skrivas som

$$\mathbf{v} = \left[\dot{x} - l\dot{\theta}\cos\theta\right]\hat{\mathbf{x}} + l\dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{z}}$$

vilket ger oss den kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]$$

Den potentiella energin kan skrivas

$$U = -mgl\cos\theta$$

Om vi nu utnyttjar att $\dot{x} = gt$ får vi Lagrangianen

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left[g^2t^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2lgt\dot{\theta}\cos\theta\right] + mgl\cos\theta$$

Lagrangianens derivator ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\dot{\theta}t\sin\theta - mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - mglt\cos\theta \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer ger detta oss rörelseekvationen

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} - mgl\cos\theta + mglt\dot{\theta}\sin\theta - mgl\dot{\theta}t\sin\theta + mgl\sin\theta$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{l}\left[\cos\theta - \sin\theta\right] \qquad (1)$$

vilket är vår sökta rörelseekvation.

b) Jämviktsläget får vi genom att sätta $\ddot{\theta} = 0$. Vår rörelseekvation (1) ger oss då följande villkor för jämviktsläget θ_0,

$$\cos\theta_0 = \sin\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

c) Vi vill nu skriva om vår rörelseekvation så att den blir lättare att lösa för små utslag kring θ_0. Vi gör enklast detta genom att använda följande trigonometriska formel,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Välj det undre tecknet, $\alpha = \theta$ och $\beta = \pi/4$ så får vi

$$\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) = \sin\theta\cos\tfrac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\theta - \cos\theta\right)$$
$$\Rightarrow \quad \cos\theta - \sin\theta = -\sqrt{2}\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Insatt i rörelseekvationen (1) får vi

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sqrt{2}g}{l}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Inför nu $\theta' = \theta - \pi/4$ som är utslaget från jämviktsläget. Vi får då

$$\ddot{\theta'} = -\frac{\sqrt{2}g}{l}\sin\theta'$$

vilket är vår vanliga rörelseekvation för en harmonisk oscillator. För små utslag kan vi approximera $\sin\theta' \simeq \theta'$ och får då

$$\ddot{\theta'} = -\frac{\sqrt{2}g}{l}\theta'$$

vilken har cos- och sin-lösningar som kan skrivas på formen

$$\theta'(t) = B\cos\left(\omega_0 t - \beta\right) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{l}}$$

där B och β bestäms ur begynnelsevillkoren. Uttryckt i vår ursprungliga variabel θ är lösningen given av

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} + B\cos\left(\omega_0 t - \beta\right) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{l}}$$

Motsvarande pendel med upphängningspunkten A fix skulle ha lösningen

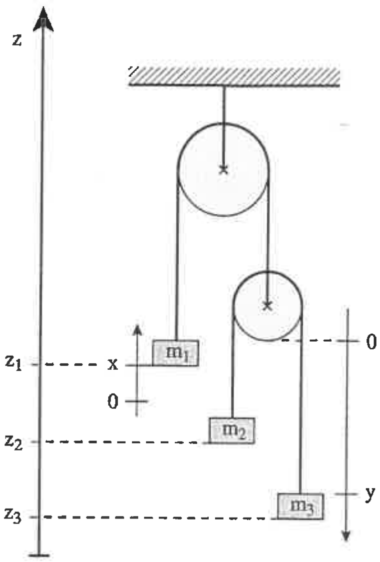
$$\theta(t) = B'\cos\left(\omega_0' t - \beta'\right) \quad ; \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Vi kan notera att vår pendel med en accelererande upphängningspunkt beter sig precis som en vanlig pendel med fix upphängningspunkt skulle göra om tyngdaccelerationen var $\sqrt{2}g$ och riktad i $-\left(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}\right)/\sqrt{2}$-riktningen. Detta är ett exempel på att vi ej kan skilja på ett accelererat system och ett som befinner sig i ett gravitationsfält.

Uppgift 2

Vi inser att problemet har två frihetsgrader och vi väljer x och y som generaliserade koordinater enligt figur. x är massa 1s läge i förhållande till ursprungsläget. y är massa 3s läge i förhållande till den högra trissan. Detta innebär att vi kan skriva ändringen av höjden för de tre massorna som

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = y - x \\ z_3 = -y - x \end{cases} \qquad (2)$$



Detta ger den kinetiska energin

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{z}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

Den potentiella energin ges av

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + m_3 g z_3 = (m_1 - m_2 - m_3)gx + (m_2 - m_3)gy$$

vilket ger oss Lagrangianen, $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}\dot{y} - (m_1 - m_2 - m_3)gx - (m_2 - m_3)gy \quad (3)$$

Derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -(m_1 - m_2 - m_3)g \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -(m_2 - m_3)g \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{x} + (m_3 - m_2)\dot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_2 + m_3)\dot{y} + (m_3 - m_2)\dot{x} \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger oss då rörelseekvationerna

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + (m_3 - m_2)\ddot{y} + (m_1 - m_2 - m_3)g = 0 \qquad (4)$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{y} + (m_3 - m_2)\ddot{x} + (m_2 - m_3)g = 0 \qquad (5)$$

Genom substitution kan vi lösa ut $\ddot{x}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5). Vi erhåller då

$$[m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3)]\,\ddot{y} + 2m_1(m_2 - m_3)g = 0$$

På samma sätt kan vi lösa ut $\ddot{y}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5) för att erhålla

$$[m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3]\,\ddot{x} + [m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3]\,g = 0$$

Båda dessa ekvationer integreras enkelt två gånger för att ge lösningen

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{[m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3]\,g}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + At + B \\ y(t) &= -\frac{2m_1(m_2 - m_3)g}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + Ct + D \end{aligned}$$

där A, B, C och D är konstanter vilka bestäms av begynnelsevillkoren. Insatt i Ekv. (2) ger dessa ekvationer oss rörelsen för de tre massorna.

Uppgift 3
Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 4

a) När det externa vridmomentet $\bar{\mathrm{N}} = 0$ blir Eulers dynamiska ekvationer

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_x &= \frac{I_2-I_3}{I_1}\bar{\omega}_y\bar{\omega}_z \\ \dot{\bar{\omega}}_y &= \frac{I_3-I_1}{I_2}\bar{\omega}_z\bar{\omega}_x \\ \dot{\bar{\omega}}_z &= \frac{I_1-I_2}{I_3}\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y \end{cases} \tag{6}$$

Vi vill nu visa att om vinkelfrekvensvektorn är given av $\boldsymbol{\omega}_a = (\omega_0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_b = (0, \omega_0, 0)$ eller $\boldsymbol{\omega}_c = (0, 0, \omega_0)$ så kommer den att fortsätta vara det. Om vi sätter in $\boldsymbol{\omega}_a$ i högerledet i Ekv. (6) får vi

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_x &= 0 \\ \dot{\bar{\omega}}_y &= 0 \\ \dot{\bar{\omega}}_z &= 0 \end{cases}$$

d v s vinkelhastighetsvektorn kommer ej att ändras. Samma sak erhålles om $\boldsymbol{\omega}_b$ eller $\boldsymbol{\omega}_c$ sätts in i Ekv. (6) och vi har därmed visat att om rotationen sker kring x-, y- eller z-axeln så kommer den att fortsätta att göra det.

b) Vi antar nu att vinkelhastighetsvektorn ges av $\boldsymbol{\omega}_a$, $\boldsymbol{\omega}_b$ eller $\boldsymbol{\omega}_c$, men lägger på en liten störning och ser om störningen växer med tiden eller ej. Vi börjar med rotation kring x-axeln, d v s med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_a$ och lägger på en liten störning. Vi antar att den sökta vinkelhastighetsvektorn kan skrivas

$$\boldsymbol{\omega}'_a(t) = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\varepsilon}(t) = (\omega_0 + \varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \varepsilon_z(t))$$

och söker $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Vidare antar vi att störningen är liten, d v s att $|\boldsymbol{\varepsilon}| \ll |\boldsymbol{\omega}_a|$. Vi sätter nu in denna ansats i Ekv. (6) och erhåller

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{I_2-I_3}{I_1}\varepsilon_y\varepsilon_z \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{I_3-I_1}{I_2}\varepsilon_z(\varepsilon_x+\omega_0) \simeq \frac{I_3-I_1}{I_2}\varepsilon_z\omega_0 \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{I_1-I_2}{I_3}\varepsilon_y(\varepsilon_x+\omega_0) \simeq \frac{I_1-I_2}{I_3}\varepsilon_y\omega_0 \end{cases} \tag{7}$$

där vi i sista ledet har försummat termer av ε relativt ω_0. Vi kan nu titta närmare på de ekvationer som bestämmer hur störningen i y- och z-led ser ut. Derivering och substitution av de två sista ekvationerna ger

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_y &= \frac{I_3-I_1}{I_2}\frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_0^2\varepsilon_y \\ \ddot{\varepsilon}_z &= \frac{I_1-I_2}{I_3}\frac{I_3-I_1}{I_2}\omega_0^2\varepsilon_z \end{cases} \tag{8}$$

Eftersom $I_3 > I_2 > I_1$ ser vi att koefficienterna framför termerna i högerleden är negativa. Vi kommer således att erhålla sin- och cos-lösningar varför störningen ej kommer att växa med tiden. Denna rotation är således stabil[1].

[1]Den första ekvationen i (7) är ej lika lätt att tolka, men det behöver vi inte göra heller. Vi vet att rörelsemängdsmomentet är bevarat. I vårt kroppsfixa roterande system innebär det att $|\mathbf{L}| = \sqrt{I_1^2\omega_x^2 + I_2^2\omega_y^2 + I_3^2\omega_Z^2}$ = konstant. Om ω_y och ω_z ej växer i storlek kommer därför ω_x att vara i stort sett oförändrad. Det räcker således med att betrakta störningen i y- och z-led som vi har gjort ovan för att se om störningen växer eller inte.

Vi har nu rotationer kring de andra två axlarna kvar att analysera och vi kan gå igenom samma maskineri för dem, men vi kan ta en genväg och erhålla rörelseekvationerna för rotation kring y-axeln med en liten störning genom cyklisk permutation av indexen ($1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \cdots$ samt $x \to y \to z \to x \to \cdots$) i Ekv. (8),

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{\varepsilon}_z &=& \frac{I_1-I_2}{I_3}\frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_0^2\varepsilon_z \\ \ddot{\varepsilon}_x &=& \frac{I_2-I_3}{I_1}\frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_0^2\varepsilon_x \end{array} \right. \tag{9}$$

Vi ser att koefficienterna framför termerna i högerleden nu är positiva. Vi kommer således att erhålla exponentiellt växande[2] lösningar. Rotationer kring y-axeln är således ej stabila utan en liten störning kommer att växa exponentiellt.

För den sista rotationen gör vi en cyklisk permutation till och får rörelseekvationerna

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{\varepsilon}_x &=& \frac{I_2-I_3}{I_1}\frac{I_3-I_1}{I_2}\omega_0^2\varepsilon_x \\ \ddot{\varepsilon}_y &=& \frac{I_3-I_1}{I_2}\frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_0^2\varepsilon_y \end{array} \right. \tag{10}$$

Koefficienterna framför högerleden är nu återigen negativa och vi får cos- och sin-lösningar. Rotationer kring z-axeln är såldes stabila. Vi har således visat att rotationer kring de två axlarna med minst respektive störst tröghetsmoment är stabila för små störningar medan rotationer kring axeln med det mellersta tröghetsmomentet är labila.

Uppgift 5

a) Hamiltonfunktionen ges av

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$$

och dess tidsderivata är

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{dL}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} \dot{q}_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \ddot{q}_k \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k - \sum_k p_k \ddot{q}_k \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) = 0 \end{aligned}$$

Hamiltonfunktionen H är därmed bevarad när vi inte har något explicit tidsberoende.

[2] Vi erhåller också exponentiellt avtagande lösningar, men det räcker med att konstatera att vi har exponentiellt växande lösningar. En godtycklig störning kommer då att växa.

b) Vi har nu att Lagrangefunktionen är given av

$$L(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{\dot q}) = T(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{\dot q}) - U(\underset{\sim}{q})$$

Hamiltonfunktionen ges nu av

$$H = \sum_k \dot q_k p_k - L = \sum_k \dot q_k \underbrace{p_k}_{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}} - T + U = \sum_k \dot q_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - T + U$$

Eftersom U ej beror av $\underset{\sim}{\dot q}$ kan vi ersätta $\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ med $\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}$ och erhåller då

$$H = \sum_k \dot q_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - T + U \tag{11}$$

Vi utnyttjar nu ledningen och visar Eulers teorem för vår kinetiska energi. T ges av

$$T = \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} c_{jk}(\underset{\sim}{q})\dot q_j \dot q_k$$

Eftersom T på denna form är en homogen funktion av grad 2 i $\underset{\sim}{\dot q}$ gäller att

$$T(\underset{\sim}{q},\lambda\dot q_1,\lambda\dot q_2,\dots,\lambda\dot q_f) = \lambda^2 T(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{\dot q})$$

Derivera med avseende på λ och sätt sedan $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt}T(\underset{\sim}{q},\lambda\dot q_1,\lambda\dot q_2,\dots,\lambda\dot q_f)\right]_{\lambda=1} &= \left[\frac{d}{dt}\ (\lambda^2 T)\right]_{\lambda=1}\\
\left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \lambda \dot q_k}\frac{d\lambda \dot q_k}{d\lambda}\right]_{\lambda=1} &= [2\lambda T]_{\lambda=1}\\
\left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \lambda \dot q_k}\dot q_k\right]_{\lambda=1} &= [2\lambda T]_{\lambda=1}\\
\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\dot q_k &= 2T
\end{aligned}$$

Därmed är Eulers teorem bevisat. Insatt i Ekv. (11) erhåller vi slutligen

$$H = \sum_k \dot q_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - T + U = 2T - T + U = T + U = E$$

vilket är vad vi skulle visa. Enligt a) är H och i således även E en rörelsekonstant.