Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

25 augusti 2000

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook.

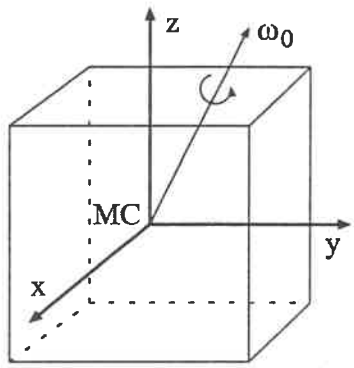
1. Betrakta en homogen kub med sidan a och massan M.

   a) Inför ett kartesiskt koordinatsystem i masscentrum MC enligt figur och beräkna tröghetstensorn. (3p)

   b) Kuben roterar med vinkelhastigheten ω_0 kring en axel genom masscentrum. Visa att rotationsenergin är given av

   $$T = \frac{Ma^2\omega_0^2}{12}$$

   oberoende av rotationsaxelns riktning. (2p)



2. Antag att vi för en partikel i en dimension har Lagrangefunktionen $L = L(q, \dot{q}, t)$ vilken uppfyller Lagranges ekvationer.

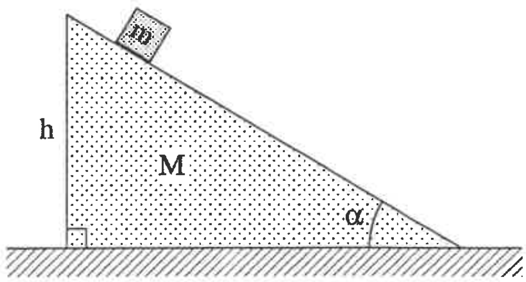
   a) Visa att $L' = L + dM(q,t)/dt$ ger samma rörelseekvationer som L. (4p)

   b) Visa att $L' = \alpha L$, där $\alpha \neq 0$ är en konstant ger samma rörelseekvationer som L. (1p)

3. En massa m kan glida friktionsfritt på en tunn kil med massan M (se figur). Kilen kan i sin tur glida friktionsfritt på ett horisontellt underlag.

   a) Tag fram rörelseekvationerna för kilens och massan ms rörelse. (3p)

   b) Om systemet startar i vila, med massan m högst upp på kilen, bestäm hur lång tid det tar innan massan m slår i det horisontella underlaget. Jämför med den tid det skulle ta om massan m istället fick falla fritt. (2p)

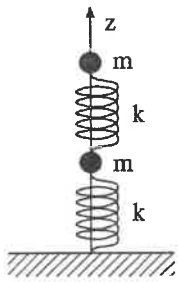


Not: Rörelsen kan antas ske enbart i figurens plan och massan m kan antas vara punktformig.

4. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

   b) Visa att en genererande funktion $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

5. Betrakta ett system med två massor med massan m och två fjädrar med fjäderkonstanten k och den naturliga längden a enligt figur. Massorna kan röra sig vertikalt längs med z-axeln och påverkas således av både krafterna från fjädrarna och gravitationskraften. Bestäm systemets vinkelfrekvenser.



Ledning: Lösningarna till ett system av andra ordningens differentialekvationer på formen

$$\ddot{\underset{\sim}{y}} = \mathbf{A}\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{B}$$

kan skrivas som $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}_h + \underset{\sim}{y}_p$ *där* $\underset{\sim}{y}_p$ *är partikulärlösningen till ekvationen ovan och* $\underset{\sim}{y}_h$ *är lösningen till den homogena ekvationen* $\ddot{\underset{\sim}{y}} = \mathbf{A}\underset{\sim}{y}$. $\underset{\sim}{y}_h$ *ges av en linjärkombination av de lösningar som erhålls genom att sätta in ansatsen*

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{a}\cos(\omega t + \delta)$$

i den homogena ekvationen.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html`.

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

25 augusti 2000

Lösningar finns även tillgängliga på
`http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html.`

Uppgift 1

a) Tröghetstensorns komponenter ges av

$$I_{jk} = \int \rho(\mathbf{x}) \left([x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]\delta_{jk} - x_j x_k\right) d^3x. \tag{1}$$

Vi kan börja med att konstatera att alla tröghetsprodukter (I_{jk} med $j \neq k$ i ekv. (1)) är noll p g a spegelsymmetri både xy-, xz- och yz-planen. Vidare måste alla tröghetsmoment (I_{jk} med $j = k$ i ekv. (1)) vara lika p g a symmetrin, d v s $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Det räcker därmed att beräkna ett av tröghetsmomenten. Vi väljer här att beräkna I_{zz}.

Massdensiteten ges av $\rho = M/a^3$ och I_{zz} ges då enligt ekv. (1) av

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \frac{M}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{M}{a^3} [z]_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{M}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 [y]_{-a/2}^{a/2} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} \right) dx \\
&= \frac{M}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(ax^2 + \frac{a^3}{12} \right) dx = \frac{M}{a^2} \left(a \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} + \frac{a^3}{12} [x]_{-a/2}^{a/2} \right) = \frac{M}{a^2} \left(\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} \right) \\
&= \frac{Ma^2}{6}
\end{aligned}$$

Tröghetstensorn ges därför av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{6} \end{pmatrix} \tag{2}$$

b) Rotationsenergin ges av

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{I} \cdot \omega. \tag{3}$$

Vi kan skriva vinkelhastighetsvektorn som

$$\omega = \omega_0 (n_x, n_y, n_z) \qquad ; \qquad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{4}$$

Rotationsenergin ges då av

$$
\begin{aligned}
T_{\rm rot} &= \frac{1}{2}\frac{Ma^2}{6}\omega_0^2(n_x,n_y,n_z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix} \\
&= \frac{Ma^2\omega_0^2}{12}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) = \frac{Ma^2\omega_0^2}{12}
\end{aligned}
$$

d v s rotationsenergin är $Ma^2\omega_0^2/12$ oberoende av rotationsaxelns riktning.

Uppgift 2

a) Notera att

$$\frac{dM(q,t)}{dt} = \frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}$$

Derivatorna av L' ges av

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial M}{\partial q} \\
\frac{\partial L'}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t}
\end{aligned}
$$

Om vi kan visa att Lagranges ekvationer är uppfyllda för L' också så är vi klara. Sätt in uttrycken ovan i Lagranges ekvationer för L'

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right] + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial M}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned}
$$

dvs om den ursprungliga Lagrangefunktionen L uppfyller Lagranges ekvationer så gör L' det också. Rörelseekvationerna är därför invarianta under transformationen $L \to L'$.

b) För $L' = \alpha L$ får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} &= \alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
\frac{\partial L'}{\partial q} &= \alpha\frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned}
$$

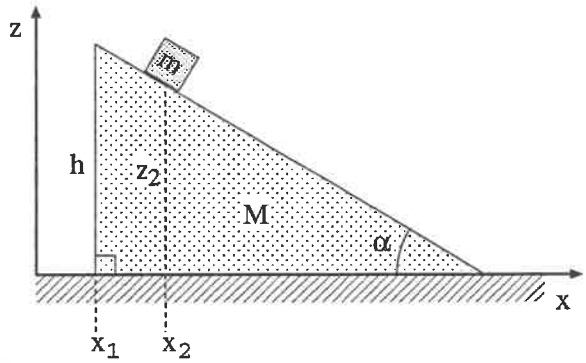
Sätt in i Lagranges ekvationer för L',

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right]$$

Om $\alpha \neq 0$ kan vi dividera med α och vi ser då att om L uppfyller Lagranges ekvationer så gör L' det också.

Uppgift 3

a) Vi kan konstatera att problemet har två frihetsgrader, kilens läge och massan ms läge. Vi inför generaliserade koordinater enligt vidstående figur, där x_1 är kilens läge och x_2 är massan ms läge längs med x-axeln.
För att förenkla beräkningarna inför vi z_2 som är massan ms läge längs med den vertikala z-axeln (alternativt skulle vi kunna välja z_2 som generaliserad koordinat istället för x_2). Geometrin i problemet ger att



$$z_2 = h - (x_2 - x_1)\tan\alpha. \tag{5}$$

För att få fram den kinetiska energin noterar vi att massan ms hastighet ges av

$$\mathbf{v}_2 = \dot{x}_2\hat{\mathbf{x}} + \dot{z}_2\hat{\mathbf{z}} = \dot{x}_2\hat{\mathbf{x}} - (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan\alpha\hat{\mathbf{z}}$$

Den kinetiska energin ges således av

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\tan^2\alpha\right] \tag{6}$$

och den potentiella energin ges av

$$U = mgz_2 = mg\left[h - (x_2 - x_1)\tan\alpha\right]. \tag{7}$$

Detta ger oss Lagrangianen

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\tan^2\alpha\right] - mg\left[h - (x_2 - x_1)\tan\alpha\right]. \tag{8}$$

Derivatorna av Lagrangianen är således

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} &=& -mg\tan\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &=& M\dot{x}_1 - m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\alpha \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial L}{\partial x_2} &=& mg\tan\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &=& m\dot{x}_2 + m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\alpha) \end{array}\right. .$$

Insatt i Lagranges ekvationer ger detta våra rörelseekvationer

$$M\ddot{x}_1 - m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha = 0 \tag{9}$$
$$m\ddot{x}_2 + m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\alpha - mg\tan\alpha = 0 \tag{10}$$

b) Ekv. (9)+(10) ger

$$M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

vilket kan integreras på en gång till

$$Mx_1 + mx_2 = At + B$$

Begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ger att $A = B = 0$, vilket ger

$$Mx_1 = -mx_2. \tag{11}$$

Ekv. (9)-(10) ger efter integration

$$Mx_1 - mx_2 - 2m(x_2 - x_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha t^2 = Ct + D.$$

Begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ger att $C = D = 0$, vilket ger

$$Mx_1 - mx_2 - 2m(x_2 - x_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha t^2 = 0.$$

Utnyttja nu ekv. (11) för att lösa ut x_1 och x_2,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -Ft^2 \\ x_2(t) & = & \frac{M}{m}Ft^2 \end{array}\right. \quad ; \quad F = \frac{mg\tan\alpha}{2M(1+\tan^2\alpha) + 2m\tan^2\alpha} \tag{12}$$

Ekv. (5) ger nu att

$$z_2 = h - (x_2 - x_1)\tan\alpha = h - \left(\frac{M}{m} + 1\right)\tan\alpha F t^2$$

och $z_2 = 0$ inträffar då

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{hm}{F(m+M)\tan\alpha}} = \sqrt{\frac{2h\left[M(1+\tan^2\alpha) + m\tan^2\alpha\right]}{g(m+M)\tan^2\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}\left[1 + \frac{M}{(m+M)\tan^2\alpha}\right]} \end{aligned} \tag{13}$$

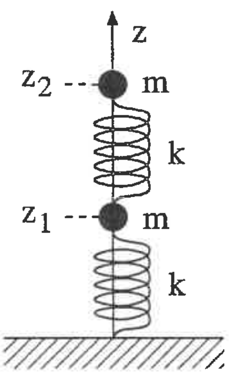
d v s detta är den tid det tar innan massan m slår i det horisontella underlaget. Vid fritt fall skulle tiden istället ha varit

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{14}$$

Vi ser att den första termen under rotuttrycket i ekv. (13) är samma som för fritt fall och att den andra termen således är korrektionen p g a kilen. Både om $\alpha \to \pi/2$ eller om $M \to 0$, så går den andra termen mot noll och vi återfår uttrycket för fritt fall, vilket verkar rimligt.

Uppgift 4
Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 5
Systemet har två frihetsgrader och vi inför de generaliserade koordinaterna z_1 och z_2 för de två massornas lägen (se figur). Detta problem kan lösas på flera sätt och vi väljer här att ta fram rörelseekvationerna med hjälp av Lagranges ekvationer och sätta in en ansats till lösning (med hjälp av ledningen) för att lösa ut de möjliga vinkelfrekvenserna.
Den kinetiska energin är



$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2$$

och den potentiella energin är

$$U = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2.$$