

Tentamensskrivning i Analytisk mekanik 5p

1997-05-31 kl 9-15

Hjälpmedel: Physics Handbook (Nördling-Österman)

1. En partikel med massa m beskrivs av en Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}, t) = (m/2)\dot{x}^2 - m\dot{x}v - mgx$$

där v och g är positiva konstanter. Sätt upp rörelseekvationen och ange allmänna lösningen. Specialisera till begynnelsevillkoret $\dot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$. Försök att tolka Lagrangefunktionen!

2. Diskutera fasrumsporträttet för en plan matematisk pendel.

3. En partikel med massa m beskrivs av Hamiltonfunktionen

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = (2m)^{-1}(p_1)^2 + (2m)^{-1}(q_1)^2 - \omega p_2^2$$

Lös Hamiltons ekvationer om ω är en positiv konstant.

4. Redogör för begreppen kanonisk transformation och genererande funktion. Visa hur man kan erhålla en transformation från "gamla" variabler q och p till "nya" variabler Q och P om den genererande funktionen är av typen $S(q, P, t)$.

5. En partikel med massa m beskrivs av Hamiltonfunktionen $H = (1/2m)p^2 + Fx$. Sätt upp Hamilton-Jacobis (tidsberoende) ekvation, bestäm lösningen och ange den kanoniska transformation som kan utnyttjas för att lösa rörelseproblemet. Använd denna för att bestämma rörelsen om $x(0) = p(0) = 0$.

A.B.

970531:11

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m \dot{x} v - mgx$$

Lagrange equations: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ ges

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x} - mv \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= -mg \end{aligned} \right\} \Rightarrow m \ddot{x} = -mg \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= -gt + \dot{x}(0) \\ x &= -\frac{g}{2} t^2 + \dot{x}(0)t + x(0) \end{aligned} \right.$$

Bg-Mkorr: $\dot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{g}{2} t^2$$

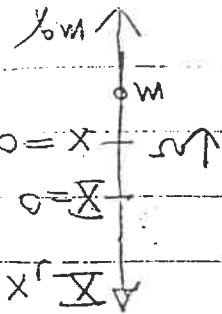
Notizen zu $L \rightarrow L + f(t)$ wie auch ableiten:
 $\frac{\partial}{\partial x} (f(t)) = \frac{\partial}{\partial x} (f(t)) = 0$

Konstante $L = \frac{1}{2} m (\dot{x} - v)^2 - mgx - \frac{1}{2} m v^2 =$
 $= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx - mgvt$ konstant

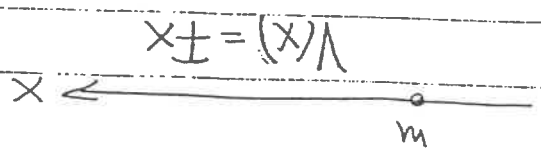
Def: $\bar{x} = x - vt$

Gesamtenergie von $L = \frac{1}{2} m \dot{\bar{x}}^2 - mg\bar{x}$

Partial ableiten, bestimmen für ein Koordinatensystem, in es nicht notwendig!



970531:5



$$H = \frac{p^2}{2m} + Fx$$

Hamilton-Jacobi equation: $H(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + Fx + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ansatz $S^* = S_1^*(x) + S_2^*(t)$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x} \right)^2 + Fx + \frac{\partial S_2^*}{\partial t} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} S_1^*(x) &= \left(\frac{1}{2} \right) \int \sqrt{2m(E - Fx)} dx = \frac{2\sqrt{2m}}{3F} (E - Fx)^{3/2} \\ S_2^*(t) &= -E \cdot t \end{aligned} \right\}$$

Def: Ny impulse $P = E \Rightarrow HJ$ -s principalen bei

$$S^*(x, P, t) = \frac{2\sqrt{2m}}{3F} (P - Fx)^{3/2} - P \cdot t$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{1}{\sqrt{2m}} (P - Fx)^{1/2} - t$$

$$P = \frac{\partial S}{\partial x} = -\sqrt{2m} (P - Fx)^{1/2}$$

gar keine neue Info.

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{ev. Konstanten}) \quad \text{f.b.}$$

Analytische Mechanik 5p

970531:31

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m q_1^2} - \omega p_2$$

Hamiltons charakterist.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} & ; & \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m q_1^2} - \omega \\ p_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{p_2^2}{m q_1^3} & ; & p_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow p_2 = \text{konst.} = l \end{aligned} \right.$$

Must. wird $\dot{q}_1$ odd integriert!

$$\frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 = -\frac{l^2}{2m q_1^2} + \frac{l^2}{2m q_1^2} + \frac{E}{2m q_1^2}$$

$$\dot{q}_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2m q_1^2} \right)} \Rightarrow \frac{dq_1}{dt} = \pm dt$$

oder

$$m q_1^2 \dot{q}_1 = \sqrt{2m E q_1^2 - l^2} = d \left(\frac{1}{2E} \sqrt{2m E q_1^2 - l^2} \right) = \pm dt \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_1^2 &= \frac{l^2 + 4E^2(t-t_0)^2}{2mE} \\ \text{oder } q_1 &= q_1(t) \text{ an } q_2 = q_2(t) \end{aligned} \right.$$

$$q_2 = \frac{2lE}{l^2 + 4E^2(t-t_0)^2} - \omega \Rightarrow q_2 = \text{const} \left[\frac{2E(t-t_0)}{l} - \omega(t-t_0) \right]$$

4 abgelesene Konstanten: l, E, t_0, t_1

970531:5
fnd

Ergebnis der Transformations

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{P}{\pm} - \frac{\pm}{2m} (Q+t)^2 \\ P &= -\mp (Q+t) \end{aligned} \right.$$

$$P(Q) = X(Q) = 0 \text{ ga}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{P}{\pm} - \frac{\pm}{2m} Q^2 \\ 0 &= -\mp Q \end{aligned} \right. \Rightarrow Q=0 \Rightarrow P=0$$

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{\pm}{2m} t^2 \\ P &= -\mp t \end{aligned} \right. \text{ bzw.}$$