F3EPT
Jenni Adams
Joakim Edsjö

Institutionen för teoretisk fysik

# Tentamen i Kvantmekanik

**11 oktober 1996**

Hjälpmedel: Mathematics Handbook, Physics Handbook och miniräknare.

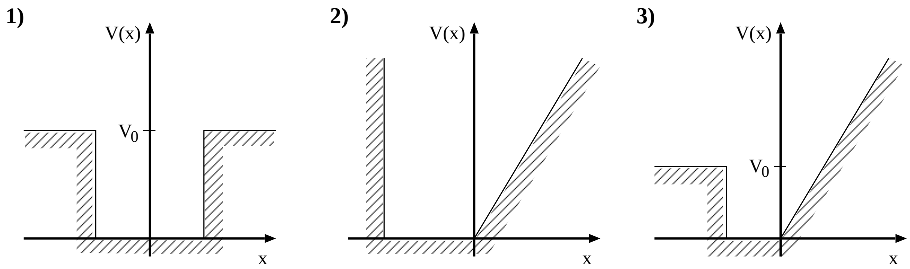
**6 problem på 6 timmar**.
Varje problem ger maximalt 5 poäng.
Läs igenom problemen innan du börjar lösa dem.
Börja lösningen på varje nytt problem på ett nytt papper.

**1.** a) Visa att om två operatorer $\hat{A}$ och $\hat{B}$ har en gemensam uppsättning egenfunktioner så är $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

b) Betrakta endast fallet då $\hat{A}$ har icke-degenererade egenvärden och visa att om $\hat{A}$ och $\hat{B}$ kommuterar så har de en gemensam uppsättning egenfunktioner.

c) Visa att egenvärdena till en Hermitsk operator är reella.

**2.** a) Betrakta följande potentialer,




i) Vilka potentialer är invarianta under paritet ($x \to -x$)?

ii) Vad kan man säga om pariteten hos energiegenfunktionerna för de olika potentialerna.

iii) För varje potential, ange om den har diskret eller kontinuerligt energispektrum (eller både och).

b) Betrakta följande tredimensionella potentialer

1) $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$
2) $V(\mathbf{r}) = ax^2 + by^4 + cz^2$
3) $V(\mathbf{r}) = ax^2 + by^4$
4) $V(\mathbf{r}) = \frac{a}{r^2}$

där $a$, $b$, och $c$ är konstanter och $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

i) Vilka potentialer kan separeras i sfäriskt polära koordinater?

ii) Vilka potentialer kan separeras i kartesiska koordinater?

iii) Vilka potentialer är invarianta under paritet ($\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$)?

c) Betrakta följande tidsoberoende vågfunktioner som beskriver ett system av två partiklar i en dimension.

1) $\psi = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\chi_{sm} \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < a$

2) $\psi = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)\chi_{sm} \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < a$

3) $\psi = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\right]\chi_{sm} \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < a$

där $x_1$ är läget för partikel 1, $x_2$ är läget för partikel 2 och $\chi_{sm}$ är spinnvågfunktionen för de två partiklarna.

i) Vilka vågfunktioner är möjliga för två icke-identiska partiklar?

ii) Vilka vågfunktioner är möjliga för två identiska fermioner om $\chi_{sm}$ är symmetrisk med avseende på utbyte av partikel 1 och 2?

iii) Vilka vågfunktioner är möjliga för två identiska bosoner om $\chi_{sm}$ är symmetrisk med avseende på utbyte av partikel 1 och 2?

d) Betrakta en väteatom (försumma spinnet) med de stationära tillstånden $\psi_{nlm}$ och energiegenvärdena $E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2 n^2}$ där $\mu$ är den reducerade massan av kärnan och elektronen och $a_0$ är Bohr-radien.

i) Vad är degenerationsgraden för tillståndet med $n = 3$?

ii) En mätning av $z$-komponenten av banimpulsmomentet ger $2\hbar$. Vilket är det lägsta energitillståndet som electronen kan befinna sig i?

iii) Hur mycket energi behöver tillföras för att excitera denna elektron till nästa högre energitillstånd?

**3.** Ett flöde av partiklar (vardera med massan $m$) infaller från $x = -\infty$ mot potentialsteget

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ V_0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Definiera transmissions- och reflektionskoefficienterna $T$ och $R$ och härled uttryck för dem då $E > V_0$.

**4.** Betrakta en partikel med massan $m$ i potentialen

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a \\ 0 & , \quad -a < x < a \\ \infty & , \quad x > a. \end{cases}$$

a) Skriv ner Schrödingerekvationen och randvillkoren för lösningarna och visa att de normerade tidsoberoende energiegenfunktionerna i området $-a \leq x \leq a$ ges av

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\frac{n\pi x}{2a} & , \quad n = 1,3,5,7,\ldots \\ \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{2a} & , \quad n = 2,4,6,8,\ldots \end{cases} \quad , \quad -a \leq x \leq a$$

med energiegenvärdena $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$.

b) Skissa sanolikhetsfördelningen för en partikel i grundtillståndet $\psi_1(x)$. Skissa också sannolikhetsfördelningen för en *klassisk* partikel i denna potential.

c) Vid $t = 0$ ges vågfunktionen för en partikel i denna potential av

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{4}}\psi_1(x) + \sqrt{\frac{3}{4}}\psi_2(x).$$

Hur ser vågfunktionen $\Psi(x,t)$ ut vid en godtycklig tid $t$?

d) För vågfunktionen $\Psi(x,t)$ bestämd i c), beräkna väntevärdena $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ och $\langle E\rangle$ som funktioner av tiden.
Ledning:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q\cos q\sin 2q dq = \frac{8}{9}$$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos q\cos 2q dq = \frac{2}{3}$$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin q\sin 2q dq = \frac{4}{3}$$

e) Betrakta en liten störning

$$V'(x) = c(a - |x|)$$

där $c$ är en liten konstant och bestäm korrektionen till grundtillståndsenergin med hjälp av första ordningens störningsräkning.

**5.** Betrakta två partiklar med spinnet $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Låt $\alpha_1$ och $\beta_1$ vara egenfunktioner till $\hat{S}_1^2$ och $S_{1z}$ svarande mot spinn upp ($m_{s_1} = +\frac{1}{2}$) och spinn ner ($m_{s_1} = -\frac{1}{2}$) för den första partikeln. Låt på samma sätt $\alpha_2$ och $\beta_2$ vara egenfunktioner till $\hat{S}_2^2$ och $S_{2z}$ svarande mot spinn upp ($m_{s_2} = +\frac{1}{2}$) och spinn ner ($m_{s_2} = -\frac{1}{2}$) för den andra partikeln.

a) Visa att $\alpha_1\alpha_2$ är den gemensamma egenfunktionen till $\hat{S}^2$ och $\hat{S}_z$ där $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$. Bestäm också motsvarande kvanttal $s$ och $m_s$ för detta tillstånd där $s(s+1)\hbar^2$ och $m_s\hbar$ är egenvärdena till $\hat{S}^2$ och $\hat{S}_z$.
Ledning: $\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}$ där $\hat{S}_{1\pm}$ och $\hat{S}_{2\pm}$ är stegoperatorer.

b) Bestäm de gemensamma egenfunktionerna till $\hat{S}^2$ och $\hat{S}_z$ svarande mot kvanttalen $|s,m_s\rangle = |1,0\rangle$ och $|s,m_s\rangle = |0,0\rangle$.

c) Betrakta spinntillståndet för en spinn-$\frac{1}{2}$ partikel

$$\chi = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

i en representationen där

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vad är sannolikheten att erhålla $+\frac{1}{2}\hbar$ för $z$-komponenten av spinnet och vad är väntevärdet $\langle S_z\rangle$?

**6.** Två partiklar (massa $m$) rör sig i den endimensionella potentialen

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_2^2$$

där index 1 svarar mot partikel 1 och index 2 svarar mot partikel 2. Förutom potentialen ovan har vi också en växelverkan mellan partiklarna som beskrivs av potentialen

$$V_{\text{int}}(x_1, x_2) = \begin{cases} -\frac{1}{4}m\omega^2(x_1 - x_2)^2 & , \quad |x_1 - x_2| < a \\ \infty & , \quad |x_1 - x_2| \geq a. \end{cases}$$

a) Uttryck potentialen i masscentrums- och relativa koordinater,

$$\begin{aligned} X &= \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

b) Den totala vågfunktionen som beskriver systemet kan skrivas

$$\Psi = \psi(X, x)\chi_{sm}$$

där $\chi_{sm}$ är en egenfunktion till $\hat{S}^2$ och $\hat{S}_z$ ($\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$). Utnyttja att

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

och lös den tidsoberoende Schrödingerekvationen för att erhålla allmänna uttryck för energiegenvärdena och motsvarande egenfunktioner. Physics Handbook och informationen given i problem 4) får användas.

c) Vilka energiegenvärden är möjliga om

i) de två partiklarna är icke-identiska?

ii) de två partiklarna är identiska fermioner med spinnet $\frac{1}{2}$ och totala spinnet är 1?

iii) de två partiklarna är identiska bosoner med spinnet 0?

**LYCKA TILL!**

Lösningar kommer att vara tillgängliga på `http://www.teorfys.uu.se/~edsjo/kmek/index.html` såväl som anslagna vid Institutionen för teoretisk fysik direkt efter tentamen.