F3EMPS & MN
Staffan Yngve

Institutionen för teoretisk fysik

Tentamen i Kvantmekanik

12 januari 1996

Hjälpmedel: Mathematics Handbook, Physics Handbook och minikräknare.

6 problem på 6 timmar.
Läs igenom problemen innan ni börjar lösa dem.
Börja varje ny lösning på ett nytt papper.

1. Låt A vara en observabel med diskret spektrum. Visa, att om systemets tillstånd beskrivs av den normerade vågfunktionen Ψ, så gäller

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \sum_n P_n A_n$$

där A_n är de möjliga mätvärdena på storheten A. Vad är P_n? (3p)

2. Definiera begreppet hermitsk operator, visa att egenvärdena till en hermitsk operator är reella och visa att egenfunktioner (till en sådan operator) svarande mot olika egenvärden är ortogonala. (3p)

3. Schrödingerekvationen för en partikel med massan m och laddning q i ett magnetfält med vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ges av

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Visa relationerna

$$\begin{aligned} m\frac{d\langle x\rangle}{dt} &= \langle p_x - qA_x\rangle \\ \frac{d\langle p_x\rangle}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

om $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x\mathbf{e}_x$ där A_x ej beror av x. Det ger poäng, men ej full poäng, att behandla fallet fri partikel utan närvaro av magnetfält. (4p)

4. En stråle av monoenergetiska partiklar vardera med massan m och energin $E > 0$ infaller (från $x = -\infty$) mot den endimensionella potentialen

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0\ ,\ x > a \\ -\frac{\hbar^2\eta^2}{2ma^2} & , \quad 0 < x < a \end{cases}$$

där η är en reell dimensionslös konstant. Sök de energier $E > 0$ för vilka vi har totaltransmission (transmissionskoefficienten lika med 1). (4p)

5. En partikel (massa m) i ett stationärt tillstånd med banimpulsmoment-kvanttal $l \neq 0$ representeras av följande vågfunktion i sfäriskt polära koordinater

$$\Psi(r,\theta,\phi,t) = N r^l e^{-\frac{r}{(l+1)a}} (\sin\theta)^l e^{il\phi - iEt/\hbar}$$

där

$$\begin{aligned} N^{-2} &= \pi(l+1)^{2l+4}(l!)^2 a^{2l+3} \\ E &= -\frac{\hbar^2}{2m(l+1)^2 a^2} \end{aligned}$$

Denna vågfunktion beskriver rörelse i potentialen $-\frac{\hbar^2}{mar}$.

a) Beräkna förväntningsvärdet av r uttryckt i l och a. (2p)

b) Beräkna sannolikhetsströmtätheten samt visa att den totala sannolikhetsströmmen genom halvplanet $\phi = 0$ är lika med $\frac{\omega}{2\pi}$ där $\omega = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dl}$. (3p)

Ledning:

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^{2l+1} d\theta = 2^{2l+1}\frac{(l!)^2}{(2l+1)!}$$

$$\int_0^\infty r^p e^{-\frac{2r}{R}} dr = p! \left(\frac{R}{2}\right)^{p+1}$$

6. En partikel med massan m rör sig i den endimensionella potentialen

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < 0 \\ mgx & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Bestäm approximativt energiegenvärdena för bundna tillstånd. (5p)

Ledning: Den lösning till differentialekvationen

$$\frac{d^2u}{dX^2} + (\alpha - X)u(X) = 0$$

som går mot noll då $X \to \infty$ ges med lämplig normering av

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left[w(\alpha - X) - \frac{w^3}{3}\right] dw.$$

För $\alpha - X > 0$ (dock inte alltför nära noll) har integralen det approximativa värdet

$$u \approx 2\sqrt{\pi}(\alpha - X)^{-1/4} \cos\left[\frac{2(\alpha - X)^{3/2}}{3} - \frac{\pi}{4}\right].$$

α är en dimensionslös parameter och X är en dimensionslös variabel.

LYCKA TILL!