F3EMPS & MN
Alexios Polychronakos
Joakim Edsjö

Institutionen för teoretisk fysik

Tentamen i Kvantmekanik

12 oktober 1995

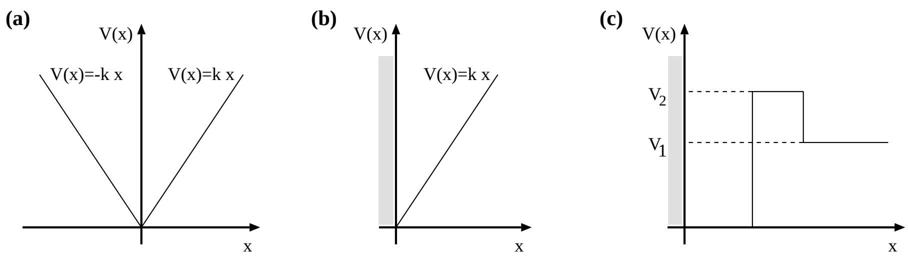
Hjälpmedel: Mathematics Handbook, Physics Handbook och minikräknare.

5 problem på 6 timmar.
Varje problem ger maximalt 5 poäng.
Läs igenom problemen innan ni börjar lösa dem.
Börja varje ny lösning på ett nytt papper.

1. a) Härled kontinuitetsekvationen för en partikel med massan m i en reell potential $V(\vec{r})$. Hur tolkas ekvationen?

b) Visa att två egentillstånd till en hermitesk operator med olika egenvärden är ortogonala.

2. **Del 1.** Betrakta de endimensionella potentialerna (a), (b) och (c) nedan (de skuggade områdena är ogenomträngliga väggar).



a) Vilka potentialer är invarianta under paritet ($x \to -x$)?

b) För varje potential, ange om den har diskret eller kontinuerligt energispektrum (eller båda). Bestäm tröskelenergin ovanför vilken kontinum börjar.

c) Visa att alla energiegenvärden till (b) också är energiegenvärden till (a).

Del 2. Betrakta följande tre potentialer i tre dimensioner:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & V_1(\vec{r}) &=& A(x^4+y^4)+Bz^2 \\
(b) \quad & V_2(\vec{r}) &=& e^{ax^2}e^{ay^2}e^{az^2} \\
(c) \quad & V_3(\vec{r}) &=& C(2+\cos\theta)r^2
\end{aligned}$$

där x, y, z är kartesiska koordinater och r, θ, ϕ är sfäriskt polära koordinater. A, B, C och a är konstanter.

a) För vilka av potentialerna ovan är Schrödingerekvationen separabel i kartesiska koordinater?

b) För vilka potentialer är den separabel i sfäriskt polära koordinater?

c) Vilka potentialer är invarianta under paritet ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$)?

d) För vilka potentialer kommuterar banimpulsmomentet $\vec{L}$ för en partikel med dess Hamiltonian H?

3. Vi har en partikel med massan m i den endimensionella potentialen

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a \\ 0 & , \quad -a \leq x \leq a \\ \infty & , \quad x > a \end{cases} .$$

Vågfunktionen för partikeln ges av

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x) + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_3(x)$$

där

$$\psi_n(x) \qquad ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

är reella normerade energiegentillstånd (ordnade med stigande energi) till potentialen $V(x)$.

a) Skriv ner $\psi_1(x)$ och $\psi_3(x)$.

b) Vad är pariteten hos $\psi(x)$?

c) Om vi mäter energin hos partikeln, vilka energier kan vi få och med vilka sannolikheter?

d) Bestäm $< x >$, $< p >$ och $< E >$.

e) Bestäm $< x^2 >$ och $< p^2 >$.

f) Bestäm $\Delta x \Delta p$.

Ledning:

$$\int_0^{\pi/2} y^2 \cos ny \cos my \, dy = 2\frac{(-1)^{(n/2-m/2)}\pi mn}{(n^2 - m^2)^2}$$

där $n \neq m$ och n, m udda heltal

och

$$\int_0^{\pi/2} y^2 \cos^2 ny \, dy = \frac{\pi}{48}\frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^2} \qquad ; \qquad n \text{ udda heltal}$$

4. En elektron (försumma spinn) med massan μ i en Coulomb-potential $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ befinner sig i energiegentillståndet $\psi_{nlm} = \psi_{210}$.

a) Hur många degenererade tillstånd existerar för detta energiegenvärde, E_2?

b) Vad är den minimala energi som krävs för att excitera denna partikel till ett tillstånd med banimpulsmoment $l = 3$?

c) En annan elektron befinner sig i tillståndet $\psi = A\psi_{100} + B\psi_{322}$ (A, B konstanter). Vi vet att väntevärdet av L_z för denna partikel är mindre än $\hbar$. Visa att väntevärdet av energin för denna partikel är mindre än E_2.

d) Ett magnetfält B kopplas på i z-riktningen, och har effekten att skifta energin hos alla egentillstånd till L_z med $\Delta E = -\frac{eBL_z}{2\mu}$. Hur starkt måste B vara för att grundtillståndet ska vara ett $l = 1$ tillstånd?

5. Vågfunktionen $\psi(x,t)$ är normerad och uppfyller den endimensionella Schrödingerekvationen för en fri partikel med massan m. En annan vågfunktion φ ges av

$$\varphi(x,t) = e^{iax+ibt}\,\psi(x - vt, t)$$

där a, b, v är konstanter.

a) Är φ normerad?

b) Visa att $<\psi|p|\psi>= p_o$ och att $<\psi|x|\psi>= \frac{p_o}{m}t + x_o$ där p_o, x_o är konstanter. (Ledning: använd Ehrenfests teorem.)

c) Bestäm a och b så att $\varphi(x,t)$ också uppfyller den fria Schrödingerekvationen.

d) För de ovan bestämda värdena på a, b, bestäm väntevärdena $<\varphi|p|\varphi>$ och $<\varphi|x|\varphi>$ uttryckta i x_o, p_o och v.

e) Om $<\psi|\frac{p^2}{2m}|\psi>= E_o$, bestäm $<\varphi|\frac{p^2}{2m}|\varphi>$ uttryckt i E_o, x_o, p_o and v.

LYCKA TILL!