Sammanfattning av ordinära differentialekvationer

Joakim Edsjö[1]
Institutionen för teoretisk fysik, Uppsala Universitet
Telefon: 018 - 18 32 50 eller 018 - 18 76 30

19 februari 1995

1 Första ordningens differentialekvationer

Kapitel 7–10 i Simmons

Allämnt kan vi skriva en första ordningens differentialekvation som

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

eller som

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2}$$

Om vi kan skriva (1) som

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3}$$

så är den *separabel* och lösningen ges av

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c \tag{4}$$

där c är en konstant.

Om $M(x, y)$ och $N(x, y)$ i ekv. (2) är homogena[2] av samma ordning så är (2) *homogen*. Vi kan då göra den separabel genom att införa $z = y/x$ och lösa ekvationen för $z = z(x)$.

[1] E-mail: edsjo@teorfys.uu.se

[2] En funktion $M(x, y)$ är homogen av ordning n om $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$.

Om $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ är en *exakt differential*, dvs om det existerar en funktion $f(x,y)$ så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \tag{5}$$

så är (2) *exakt.* Följande teorem är då bra att ha

Teorem. *Ekvation (2) är exakt om och endast om*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{6}$$

Om ekvation (2) är exakt så löses den genom att finna $f(x,y)$. Integration av $M(x,y)$ med avseende på x ger $f(x,y)$ så när som på en okänd funktion $g(y)$. Derivatan av $f(x,y)$ med avseende på y är lika med $N(x,y)$ och detta ger en differentialekvation för $h(y)$. Lösningen till (2) ges sedan av $f(x,y) = c$.

Ibland är inte ekv. (2) exakt, men kan göras exakt med hjälp av en integrerande faktor, $\mu(x,y)$. Vi söker då $\mu(x,y)$ så att

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{7}$$

Ofta kan man anta att $\mu = \mu(x)$ eller $\mu = \mu(y)$ och ekv. (7) blir då mycket enklare att lösa.

Den allmänna *linjära* första ordningens differentialekvation kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{8}$$

och den löses enklast genom att observera att $e^{\int P(x)dx}$ är en integrerande faktor. Multiplikation med $e^{\int P(x)dx}$ ger då

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{9}$$

vilket sedan integreras.

2 Andra ordningens differentialekvationer

Kapitel 11–19 i Simmons

Man kan skriva den allmänna andra ordningens differentialekvationen som

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{10}$$

I vissa fall kan man reducera ordningen på ekv. (10),

- Om y ej ingår i F så införs

$$y' = p \qquad \text{och} \qquad y'' = \frac{dp}{dx} \tag{11}$$

  varefter en första ordningens differentialekvation, $f(x, p, dp/dx) = 0$, erhålles med $p = p(x)$ som lösning. Integration ger sedan $y = y(x)$.

- Om x ej ingår i F så införs

$$y' = p \qquad \text{och} \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \tag{12}$$

  vilket ger en första ordningens differentialekvation, $f(y, p, pdp/dy)$, med $p = p(y)$ som lösning. Därefter löser man ekvationen $y' = p(y)$ med $y = y(x)$ som lösning.

När den andra ordningens differentialekvation är *linjär* kan vi skriva den som

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x). \tag{13}$$

I allmänna fall finns ingen metod med vilken det alltid går att lösa ekv. (13), men ibland kan man gissa en lösning och då är följande teorem bra att ha (se även sidan 16).

Teorem 14-A. *Låt $P(x)$, $Q(x)$ och $R(x)$ vara kontinuerliga funktioner på intervallet $a \le x \le b$. Om x_0 är någon punkt i detta intervall och y_0 och y_0' är vilka tal som helst så har*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x), \qquad y(x_0) = y_0 \text{ och } y'(x_0) = y_0' \tag{14}$$

en och endast en lösning $y = y(x)$ på intervallet $a \le x \le b$.

Om $R(x) = 0$ så reduceras ekv. (13) till den *homogena* ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \tag{15}$$

För att hitta den allmänna lösningen till (13) måste man även betrakta den homogena ekvationen (15) vilket följande teorem behandlar

Teorem 14-B. *Om y_g är den allmänna lösningen till (15) och y_p är en partikulärlösning till (13) så ges den fullständiga lösningen till (13) av $y = y_g + y_p$.*

Vidare har vi följande superpositionsteorem för lösningar till den homogena ekvationen (15)

Teorem 14-C. *Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är två lösningar till (15) så är $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ också en lösning till (15) för alla konstanter c_1 och c_2.*

Det gäller nu att hitta den allmänna lösningen till den homogena ekvationen (15) och då har vi följande teorem till vår hjälp

Teorem 15-A. *Låt $y_1(x)$ och $y_2(x)$ vara två* linjärt oberoende[3] *lösningar till (15) på intervallet $[a, b]$. Då är*

$$y_g = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{16}$$

den allmänna lösningen till (15) på $[a, b]$.

För att undersöka linjärt beroende hos två lösningar $y_1(x)$ och $y_2(x)$ till (15) så är *Wronskianen*

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 \tag{17}$$

ett bra hjälpmedel. Vi har följande två viktiga lemma

Lemma 15-2. *Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är två lösningar till (15) på $[a, b]$ så är de linjärt beroende på detta intervall om och endast om Wronskianen $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$ är identiskt lika med noll på $[a, b]$.*

[3] Två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ är linjärt oberoende på intervallet $[a, b]$ om man ej kan uttrycka den ena som som en konstant gånger den andra.

Lemma 15-1. *Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är två lösningar till (15) på $[a, b]$ så är deras Wronskian $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ antingen identiskt lika med noll eller aldrig noll på $[a, b]$.*

Med andra ord räcker det med att titta på om Wronskianen (17) är lika med eller skild från noll i någon punkt på intervallet $[a, b]$. Om $W(y_1, y_2) = 0$ så är $y_1(x)$ och $y_2(x)$ linjärt beroende och annars är de linjärt oberoende[4].

Om vi känner en lösning, $y_1(x)$, till (15) (som vi t ex kan ha hittat genom gissning) så kan den andra lösningen erhållas genom att ansätta

$$y_2(x) = v(x) y_1(x). \tag{18}$$

Sätter vi in (18) i (15) och utnyttjar att $y_1(x)$ är en lösning till (15) så erhåller vi

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - P(x) \tag{19}$$

som enkelt[5] integreras till

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} \tag{20}$$

vilket sedan integreras en gång till för att få $v(x)$.

Ett specialfall av ekv. (15) är när vi har konstanta koefficienter,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \tag{21}$$

där p och q nu är konstanter. Denna ekvation löses genom att ansätta $y = e^{mx}$. Ekv. (21) ger då den *karakteristiska ekvationen*

$$m^2 + pm + q = 0. \tag{22}$$

Beroende på vad rötterna till (22) är så får vi olika linjärt oberoende lösningar:

- Om m_1 och m_2 är reella och olika är de två lösningarna till (21)

$$y_1 = e^{m_1 x} \qquad \text{och} \qquad y_2 = e^{m_2 x} \tag{23}$$

[4]Notera att detta och lemma 15-1 och 15-2 endast gäller om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar till (15).

[5]Om man använder denna metod i ett specifikt problem kan det vara frestande att sätta in vad $y_1(x)$ är, men då är det inte säkert att det är så lätt att se hur man integrerar (19). Därför är det bättre att vänta med att sätta in vad y_1 är till slutet.

- Om m_1 och m_2 är olika komplexa rötter, $m_{1/2} = a \pm ib$, så ges lösningarna till (21) av
$$y_1 = e^{ax}\cos bx \qquad \text{och} \qquad y_2 = e^{ax}\sin bx \tag{24}$$

- Om m_1 och m_2 är lika och reella så ges lösningarna till (21) av
$$y_1 = e^{m_1 x} \qquad \text{och} \qquad y_2 = xe^{m_1 x} \tag{25}$$

Ett sätt att hitta partikulärlösningen till (21) är att ansätta en partikulärlösning på samma form som $R(x)$ men med obestämda koefficienter där koefficienterna erhålles genom att sätta in ansatsen i (21). Vi kan ansätta

- $y_p = Ae^{kx}$ då $R(x) \simeq e^{kx}$.
- $y_p = Axe^{kx}$ då $R(x) \simeq e^{kx}$ och k är en lösning till den karakteristiska ekvationen (22).
- $y_p = Ax^2e^{kx}$ då $R(x) \simeq e^{kx}$ och k är en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen (22).
- $y_p = A\sin kx + B\cos kx$ då $R(x) \simeq \sin kx$ eller $R(x) \simeq \cos kx$.
- $y_p = x(A\sin kx + B\cos kx)$ då $R(x) \simeq \sin kx$ eller $R(x) \simeq \cos kx$ och k är en lösning till den karakteristiska ekvationen (22).
- $y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ då $R(x)$ är ett polynom av grad n. Om $q = 0$ måste en grad högre ansättas för y_p.

Ett mer generellt sätt att hitta partikulärlösningen till (13) är att utnyttja de två linjärt oberoende lösningarna $y_1(x)$ och $y_2(x)$ till den homogena evkationen (15). Ansätt en partikulärlösning på formen
$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x). \tag{26}$$
Om man sätter in (26) i (13) och utnyttjar att y_1 och y_2 är lösningar till (13) så erhåller vi en ekvation för v_1 och v_2. Vi behöver en ekvation till och kan välja den fritt. För att göra det enkelt för oss betraktar vi $y_p' = (v_1y_1' + v_2y_2') + (v_1'y_1 + v_2'y_2)$ och väljer $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$ som vår andra ekvation. På det viset slipper vi andraderivator av v_1 och v_2 när vi sätter in ansatsen (26) i (13) och det blir mycket lättare att hitta $v_1(x)$ och $v_2(x)$.

3 Högre ordningars linjära differentialekvationer

Kapitel 22 i Simmons

Om vi har högre ordningars linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{27}$$

kan vi behandla dessa på samma sätt som andra ordningens. Vi ansätter en lösning på formen $y = e^{mx}$ och får en karakteristisk ekvation för m. Hur lösningarna ser ut beror som tidigare på hur rötterna m_i ser ut.

4 Operatormetoder för att hitta partikulärlösningar

Kapitel 23 i Simmons

Om vi inför deriveringsoperatorn

$$D = \frac{d}{dx} \tag{28}$$

kan vi skriva om ekv. (27) som

$$p(D)y = f(x) \tag{29}$$

där

$$\begin{aligned} p(D) &= D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \\ &= (D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_n) \end{aligned} \tag{30}$$

där m_i är rötterna till den karakteristiska ekvationen. Lösningen till (29) kan sedan formellt skrivas

$$y = \frac{1}{p(D)} f(x). \tag{31}$$

Vi kan sedan partialbråksuppdela $1/p(D)$ och utnyttja att[6]

$$p(D)e^{kx}g(x) = e^{kx}p(D+k)g(x) \qquad \text{och} \qquad \frac{1}{p(D)}e^{kx}g(x) = e^{kx}\frac{1}{p(D+k)}g(x) \tag{32}$$

för att hitta partikulärlösningar när högerledet i (27) är en kombination av exponentialfunktioner och polynom. Termerna $1/(D - m_i + k)$ Taylorutvecklas sedan och eftersom vi bara behöver ta med ett begränsat antal termer (sedan blir högre derivator av plynomet noll) så kan vi hitta partikulärlösningen.

[6] Visas genom att utnyttja kedjeregeln för derivator.

5 System av första ordningens differentialekvationer

Kapitel 54–62 i Simmons

5.1 Allmänt

En n:e-grads differentialekvation

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{33}$$

kan alltid skrivas om som ett system av n stycken första ordningens differentialekvationer. Sätt in

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)} \tag{34}$$

i ekv. (33) ovan så erhålles

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{35}$$

5.2 Linjära system

Betrakta nu ett system av två första ordningens differentialekvationer,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y, t) \end{cases} . \tag{36}$$

Om $F(x, y, t)$ och $G(x, y, t)$ är *linjära* kan (36) skrivas på formen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} . \tag{37}$$

För systemet (37) har vi ett viktigt teorem:

Teorem 55-A. *Om t_0 är någon punkt i intervallet $[a, b]$ och $f_1(t)$ och $f_2(t)$ är kontinuerliga i intervallet och om x_0 och y_0 är vilka tal som helst så har systemet (37) en och endast en lösning i intervallet $[a, b]$ sådan att $x(t_0) = x_0$ och $y(t_0) = y_0$.*

Den *homogena* varianten av (37) är

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y \end{cases} . \tag{38}$$

Om vi har två lösningar till (38),

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \tag{39}$$

så är en superposition av dessa lösningar också en lösning till (38). Vidare vill vi kunna avgöra om lösningarna (39) är linjärt beroende eller inte. Vi inför därför Wronskianen för systemet (38),

$$W(t) = x_1(t)y_2(t) - y_1(t)x_2(t). \tag{40}$$

Vi har då följande teorem

Teorem 55-D. *Låt (39) vara två lösningar till (38) på intervallet* $[a, b]$. *Om* $W(t)$ *är Wronskianen för de två lösningarna så är antingen* $W(t)$ *identiskt lika med noll eller aldrig noll på* $[a, b]$.

Teorem 55-C. *Låt (39) vara två lösningar till (38) på intervallet* $[a, b]$. *Om* $W(t) \neq 0$ *på* $[a, b]$ *så är*

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \end{cases} . \tag{41}$$

den allmänna lösningen till (38) på $[a, b]$.

Betrakta nu homogena linjära system av två första ordningens differentialekvationer med konstanta koefficienter,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} . \tag{42}$$

Detta system löses med ansatsen

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{mt} \\ y(t) = Be^{mt} \end{cases} \tag{43}$$

där A och B är konstanter. Om man sätter in (43) i (42) så erhåller man ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a_1 - m)A + B = 0 \\ a_2A + (b_2 - m)B = 0 \end{cases} . \tag{44}$$

För att (44) ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten vara noll, vilket ger den karakteristiska ekvationen

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \tag{45}$$

Hur lösningarna till (42) ser ut beror på rötterna m_1 och m_2:

- Om m_1 och m_2 är reella och olika så ges lösningarna av

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} . \tag{46}$$

- Om m_1 och m_2 är komplexa och olika, $m_{1/2} = a \pm ib$, så ges lösningarna av

$$\begin{cases} x = e^{at}\left[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)\right] \\ y = e^{at}\left[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)\right] \end{cases} . \tag{47}$$

- Om m_1 och m_2 är reella och lika så ges lösningarna av $(m_1 = m_2 = m)$

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} . \tag{48}$$

Konstanterna $A, \ldots, B_2$ erhålles genom att var för sig sätta in de två lösningarna i (42). Detta ger samband mellan konstanterna och genom att välja några av dem så erhålles de andra.

5.3 Icke-linjära system, kritiska punkter och stabilitet

Betrakta nu det icke-linjära systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} . \tag{49}$$

Om $F(x, y)$ och $G(x, y)$ ej beror av t är systemet *autonomt*. Systemet (49) har lösningen

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{50}$$

som beskriver vägar i fasrummet (rummet som spänns upp av x och y). Om $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ så är (x_0, y_0) en kritisk punkt.

Kritiska punkter är intressanta att studera och för detta ändamål så behöver vi några definitioner.

Definition. *Låt (x_0, y_0) vara en isolerad kritisk punkt. Vi säger då att*

- *En väg* närmar sig *(x_0, y_0) om*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \quad \textit{och} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0. \tag{51}$$

- *Om dessutom*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \tag{52}$$

  existerar eller är $\pm\infty$ så går vägen in i *den kritiska punkten (x_0, y_0) då $t \to \infty$.*

Ovanstående deifinitioner gäller även då $t \to -\infty$.

Differentialekvationen för vägarna ges av

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \tag{53}$$

där riktingen i vilken vägarna genomlöpes erhålles från (49).

De kritiska punkterna delas in i fyra grupper:

- **Noder.** Om alla vägar närmar sig den kritiska punkten och dessutom går in i den då $t \to \pm\infty$ är den en nod.
- **Sadelpunkter.** Om två vägar närmar sig och också går in i den kritiska punkten då $t \to \infty$ samt om två vägar närmar sig och går in i den kritiska punkten då $t \to -\infty$, men övriga vägar inte närmar sig den kritiska punkten så är den en sadelpunkt.
- **Centra.** Om den kritiska punkten omges av en uppsättning slutna vägar men ingen väg närmar sig punkten då $t \to \pm\infty$ så är den kritiska punkten ett centrum.
- **Spiraler.** Om en uppsättning vägar närmar sig den kritiska punkten i spiraler som snurrar runt punkten ett oändligt antal gånger då $t \to \pm\infty$, men ingen väg går in i den så är punkten en spiral.

En annan viktig egenskap hos kritiska punkter är deras stabilitet. Betrakta en kritisk punkt i origo.

Definition. *Om det för varje R existerar ett positivt tal $r \leq R$ så att varje väg som är innanför cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ vid t_0 stannar innanför denna cirkel för alla $t > t_0$ så är den kritiska punkten* $(0, 0)$ stabil.

Vidare gäller

Definition. *Om den kritiska punkten* $(0, 0)$ *är stabil och det existerar en cirkel $x^2 + y^2 = r_0^2$ så att varje väg som är innanför denna cirkel vid t_0 närmar sig origo då $t \to \infty$ så är den kritiska punkten* asymptotiskt stabil.

För linjära system kan man sluta sig till de kritiska punkternas typ och stabilitet genom att titta på rötterna till den karakteristiska ekvationen (45). Vi har tre *huvudfall*

- **Fall A.** Om m_1 och m_2 är reella, av samma tecken och olika så är den kritiska punkten $(0, 0)$ en nod.
- **Fall B.** Om m_1 och m_2 är reella, men av olika tecken så är den kritiska punkten $(0, 0)$ en sadelpunkt.
- **Fall C.** Om $m_1 = m_2^*$ och realdelen hos m_1 och m_2 är skild från noll så är den kritiska punkten $(0, 0)$ en spiral.

och två *gränsfall*

- **Fall D.** Om m_1 och m_2 är lika och reella så är den kritiska punkten $(0, 0)$ en nod.
- **Fall E.** Om $m_1 = m_2^*$ och realdelen hos m_1 och m_2 är noll så är den kritiska punkten $(0, 0)$ ett centrum.

Stabiliteten hos den kritiska punkten $(0, 0)$ kan också utläsas ur m_1 och m_2

- Om $Re(m_1) \leq 0$ och $Re(m_2) \leq 0$ så är den kritiska punkten $(0, 0)$ stabil.
- Om $Re(m_1) < 0$ och $Re(m_2) < 0$ så är den kritiska punkten $(0, 0)$ asymptotiskt stabil.

För icke-linjära sytem kan man i vissa fall använda teorin för linjära system för att sluta sig till de kritiska punkternas typ och stabilitet. Om man Taylorutvecklar (49) så erhåller man

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + g(x,y) \end{cases} . \tag{54}$$

Vi inför nu benämningen *enkel* kritisk punkt.

Definition. $(0,0)$ *är en* enkel *kritisk punkt till (54) om*

a) $(0,0)$ *är en kritisk punkt till (54).*

b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

c) $f(x,y)$ *och* $g(x,y)$ *är kontinuerliga och har kontinuerliga förstaderivator.*

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ och } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Vi har då följande viktiga teorem:

Teorem 62-A. *Om* $(0,0)$ *är en enkel kritisk punkt till det icke-linjära systemet (54) och är en kritisk punkt av huvudtyp*[7] *(enligt sidan 12) till det linjära systemet (42) så är den kritiska punkten av samma typ för det icke-linjära systemet som för det linjära.*

Vad gäller stabilitet har vi följande teorem:

Teorem 62-B. *Om* $(0,0)$ *är en enkel kritisk punkt till det icke-linjära systemet (54) och en asymptotiskt stabil kritisk punkt till det linjära systemet (42) så är den kritiska punkten asymptotiskt stabil för det icke-linjära systemet också.*

Teorem i problem 62.3. *Skriv den karakteristiska ekvationen (45) för det linjära systemet (42) som* $m^2 + pm + q = 0$. *Om* $(0,0)$ *är en enkel kritisk punkt till det icke-linjära systemet (54) och om* $p < 0$ *och* $q > 0$ *så är* $(0,0)$ *en instabil kritisk punkt till det icke-linjära systemet (54).*

[7] Notera att om någon av rötterna till den karakteristiska ekvationen är noll så är villkor b) i definitionen av enkel kritisk punkt ej uppfyllt och teoremet gäller därför inte.

Ett annat sätt att undersöka stabilitet hos det icke-linjära systemet (49) är att betrakta *Liapunovfunktionen* $E(x, y)$.

Definition. *$E(x, y)$ är en Liapunovfunktion till systemet (49) om*

- *$E(x, y)$ är positivt definit*[8].
- *$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}F(x, y) + \frac{\partial E}{\partial y}G(x, y)$ är negativt semidefinit.*

Vi har då följande viktiga teorem

Teorem 61-A. *Om det existerar en Liapunovfunktion $E(x, y)$ till systemet (49) och $(0, 0)$ är en kritisk punkt så är den stabil. Om dessutom $\frac{dE}{dt}$ är negativt definit så är $(0, 0)$ en asymptotiskt stabil kritisk punkt.*

Vidare har vi

Teorem i problem 61.4. *Om $(0, 0)$ är en kritisk punkt till systemet (49) så är den instabil om det existerar en funktion $E(x, y)$ med följande egenskaper*

a) *$E(x, y)$ är kontinuerlig och har kontinuerliga förstaderivator i en omgivning av origo.*

b) *$E(0, 0) = 0$.*

c) *Varje cirkel centrerad på origo innehåller minst en punkt där $E(x, y) > 0$.*

d) *$\frac{dE}{dt}$ är positivt definit.*

[8]Om $E(x, y)$ är en funktion sådan att $E(0, 0) = 0$ är den *i)* positivt definit om $E(x, y) > 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$, *ii)* positivt semidefinit om $E(x, y) \geq 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$, *iii)* negativt definit om $E(x, y) < 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$, *iv)* negativt semidefinit om $E(x, y) \leq 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

6 Variationskalkyl

Kapitel 65–67 i Simmons

Vi vill hitta den funktion $y(x)$ som minimerar funktionalen

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{55}$$

Genom att införa variationen $\eta(x)$ som försvinner i ändpunkterna kan vi härleda *Eulers ekvation*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{56}$$

7 Existens och entydighet hos lösningar

Kapitel 68–70 i Simmons

Skriv om differentialekvationen

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{57}$$

som

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt. \tag{58}$$

Ekvation (58) kan användas för att iterativt förbättra en approximativ lösning $y_0(x)$. Denna metod för att finna lösningen till (57) kallas *Picards metod med succesiva approximationer.*

Vad gäller existens och entydighet hos lösningar har vi några viktiga varianter på *Picards teorem*

> **Teorem 69-A.** *Låt $f(x, y)$ och $\partial f/\partial y$ vara kontinuerliga funktioner av x och y på en sluten rektangel R med sidor parallella med axlarna. Om (x_0, y_0) är någon inre punkt av R så existerar det ett tal $h > 0$ så att*
>
> $$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{59}$$
>
> *har en och endast en lösning $y = y(x)$ på intervallet $|x - x_0| \leq h$.*

> **Teorem 69-B.** *Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion som uppfyller Lipschitz-villkoret*
>
> $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{60}$$

för något K på remsan $a \leq x \leq b$ och $-\infty < y < \infty$. Om (x_0, y_0) är någon punkt i denna remsa så har

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{61}$$

en och endast en lösning $y = y(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$.

Notera att Teorem 69-B innebär att $y' = P(x)y + Q(x),\ y(x_0) = y_0$ har en och endast en lösning i intervallet $a \leq x \leq b$ om $P(x)$ och $Q(x)$ är kontinuerliga på detta intervall.

Picards metod med succesiva approximationer kan också användas för system av differentialekvationer. Skriv om

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y,z), & y(x_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dx} = g(x,y,z), & z(x_0) = z_0 \end{cases} \tag{62}$$

som

$$\begin{cases} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t), z(t)]dt \\ z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g[t, y(t), z(t)]dt \end{cases} \tag{63}$$

och använd (63) för att iterativt förbättra den approximativa lösningen $y_0(x), z_0(x)$.

Man kan formulera Picards teorem även för system av differentialekvationer och utifrån det erhålla

Teorem 70-A. *Låt $P(x)$, $Q(x)$ och $R(x)$ vara kontinuerliga funktioner på intervallet $a \leq x \leq b$. Om x_0 är någon punkt i detta intervall och y_0 och y_0' är vilka tal som helst så har*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x), \qquad y(x_0) = y_0 \text{ och } y'(x_0) = y_0' \tag{64}$$

en och endast en lösning $y = y(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$.