Kort sammanfattning av ordinära differentialekvationer

Joakim Edsjö

edsjo@physto.se

6 april 2000

System av första ordningens differentialekvationer

En n:e-grads differentialekvation

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

kan alltid skrivas om som ett system av n stycken första ordningens differentialekvationer. Sätt in

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)} \tag{2}$$

i ekv. (1) ovan så erhålles

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Linjära system

Betrakta nu ett system av två första ordningens differentialekvationer,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,y,t) \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y,t) \end{cases} . \qquad (4)$$

Om $F(x,y,t)$ och $G(x,y,t)$ är *linjära* kan (4) skrivas på formen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} . \qquad (5)$$

För systemet (5) har vi ett viktigt teorem:

> Teorem Om t_0 är någon punkt i intervallet $[a,b]$ och $f_1(t)$ och $f_2(t)$ är kontinuerliga i intervallet och om x_0 och y_0 är vilka tal som helst så har systemet (5) en och endast en lösning i intervallet $[a,b]$ sådan att $x(t_0) = x_0$ och $y(t_0) = y_0$.

Homogena linjära system

Betrakta nu homogena linjära system av två första ordningens differentialekvationer med konstanta koefficienter,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} . \tag{6}$$

Detta system löses med ansatsen

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{mt} \\ y(t) = Be^{mt} \end{cases} \tag{7}$$

där A och B är konstanter. Om man sätter in (7) i (6) så erhåller man ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a_1 - m)A + B = 0 \\ a_2 A + (b_2 - m)B = 0 \end{cases} . \tag{8}$$

För att (8) ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten vara noll, vilket ger den karakteristiska ekvationen

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \tag{9}$$

Hur lösningarna till (6) ser ut beror på rötterna m_1 och m_2:

- Om m_1 och m_2 är reella och olika så ges lösningarna av

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} . \tag{10}$$

- Om m_1 och m_2 är komplexa och olika, $m_{1/2} = a \pm ib$, så ges lösningarna av

$$\begin{cases} x & = & e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ & + & c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y & = & e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \\ & + & c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} . \tag{11}$$

- Om m_1 och m_2 är reella och lika så ges lösningarna av ($m_1 = m_2 = m$)

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} . \tag{12}$$

Konstanterna $A, \ldots, B_2$ erhålles genom att var för sig sätta in de två lösningarna i (6). Detta ger samband mellan konstanterna och genom att välja några av dem så erhålles de andra.

Icke-linjära system och kritiska punkter

Betrakta nu det icke-linjära systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} . \tag{13}$$

Om $F(x,y)$ och $G(x,y)$ ej beror av t är systemet *autonomt*. Systemet (13) har lösningen

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{14}$$

som beskriver vägar i fasrummet (rummet som spänns upp av x och y). Om $F(x_0,y_0) = G(x_0,y_0) = 0$ så är (x_0,y_0) en kritisk punkt.