

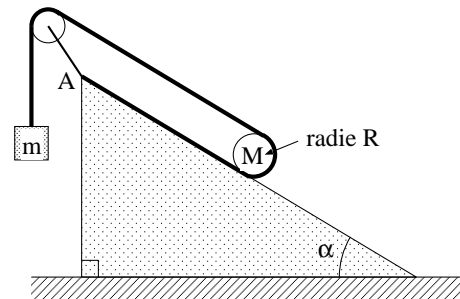


Inlämningsuppgifter i Analytisk Mekanik

VT 2007

Senaste inlämningsdatum för inlämningsuppgifterna finns angivet i kursplanen, på kursens hemsida www.physto.se/~edsjo/teaching/am/ samt i högermarginalen invid respektive uppgift. Inlämningsuppgifterna är frivilliga, men är du godkänd på dem (dvs får ihop minst 15 poäng av maximalt 25) så får du en uppgift tillgodo på tentamen.

1. Ett tunt cylindriskt skal med massa M och radie R kan rulla på en fix kil med toppvinkeln α (se figur). Runt cylindern löper ett tunt snöre (med försumbar massa) vars ena ände är fäst i punkten A och vars andra ände är fäst i en massa m . Snöret löper över en friktionsfri och masslös trissa vid A . Massorna m och M påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren.



To 1/2

- a) Tag fram och lös rörelseekvationen för rörelsen hos massan m . (3p)
- b) Bestäm den toppvinkel α för vilken systemet befinner sig i jämvikt. (2p)

2. a) Betrakta tvåkropparsproblemet med en gravitationspotential (dvs Keplerproblemet),

To 8/2

$$U(r) = -\frac{A}{r} \quad ; \quad A > 0$$

Tag fram bankurvorna och visa Keplers första lag, dvs att bankurvorna är ellipser då den totala energin för den relativa rörelsen $E < 0$. (2p)

- b) Visa Keplers tredje lag, dvs att

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konstant}$$

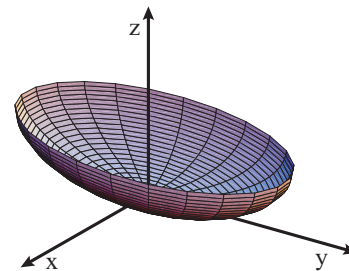
där a är halva storaxelns längd och T är perioden. (2p)

- c) Under vilka förutsättningar gäller Keplers tredje lag exakt? (1p)

3. Ett badkar har formen av en halv ellipsoid, där höjden, z , ges av

$$z = c - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

där a , b och c är konstanter. Du har precis badat och tappat ur vattnet när du tappar tvålen i badkaret. Tvålen beskriver då små svängningar kring jämviktsläget längst ner i badkaret. Bestäm vinkelfrekvensen för dessa! Friktionen mellan tvålen och badkaret kan antas vara försumbar. (5p)



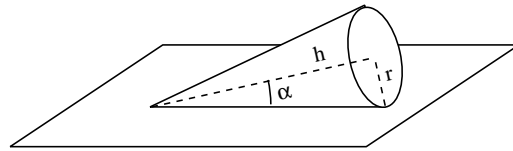
To 15/2

4. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)
- b) Utgå från Hamiltons variationsprincip $\delta \int [\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0$ och visa att en genererande funktion $S(q, P, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variablsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{q, p\}$ och de nya variablerna $\{Q, P\}$. (3p)

To 22/2

Ledning: Notera att $\frac{d}{dt} \sum_i Q_i P_i$ kan dras ifrån eller läggas till Hamiltonfunktionen utan att rörelseekvationerna ändras.

5. En homogen kon med massan m , höjden h och toppvinkeln 2α rullar utan att glida på ett plan. Vinkelhastigheten i ett givet ögonblick är ω_0 . Beräkna rörelseenergin. (5p)



Ti 13/3

Ledning: Den del av konen som i varje ögonblick är i kontakt med underlaget befinner sig temporärt i vila. Detta innebär att vinkelhastighetsvektorn ω vid varje tidpunkt måste vara riktad längs med denna linje.

Lycka till!