Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-16 46 49

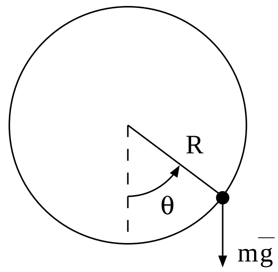
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

20 augusti 1999

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook

1. En partikel med massa m rör sig friktionsfritt på en cirkel med radie R i vertikalplanet under inverkan av gravitationen (plan matematisk pendel).



a) Sätt upp Hamiltonfunktionen och Hamiltons kanoniska ekvationer. Lös sedan rörelsen för små utslagsvinklar. (3p)

b) Definiera fasrummet, $\mathbf{P}$, och skissera hur lösningskurvorna ser ut för allmänna utslagsvinklar. (2p)

2. a) Definiera tröghetstensorn för en stel kropp med massfördelningen $\rho(\vec{x})$. Ange särskilt hur komponenterna ser ut i ett kartesiskt koordinatsystem. (1p)

b) Visa att om kroppen är rotationssymmetrisk runt z-axeln så är $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$. (2p)

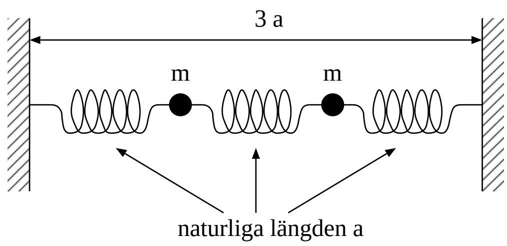
c) Visa att för tröghetstensorns komponenter gäller att $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$. För vilka kroppar gäller likhet? (2p)

3. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Utgå från Hamiltons variationsprincip $\delta \int [\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)] dt = 0$ och visa att en genererande funktion $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

Ledning: Notera att $\frac{d}{dt} \sum_i Q_i P_i$ kan dras ifrån eller läggas till Hamiltonfunktionen utan att rörelseekvationerna ändras.

4. Tre fjädrar med naturliga längden a och fjäderkonstanten k är ihopsatta med två massor m och fästade mellan två väggar på asvtåndet $3a$ enligt figur. Fjädrarna och massorna kan endast röra sig längs med en rät linje och fjädrarnas massor kan försummas. Bestäm systemets vinkelfrekvenser.



Ledning: Om x och y är lägena för de två massorna kan det vara enklare att betrakta $z_1 = x+y$ och $z_2 = x - y$ när rörelseekvationerna ska lösas.

5. a) Om f och g är två kanoniska variabler, definiera Poissonparentesen $\{f, g\}$. (1p)

b) Diskutera hur Poissonparenteser kan användas för att undersöka om en transformation $(q, p) \to (Q, P)$ är kanonisk. (1p)

c) Ange hur Hamiltons kanoniska ekvationer kan skrivas med hjälp av Poissonparenteser. (1p)

d) Visa att

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}$$

där g är en kanonisk variabel. (1p)

e) Visa att om u och v är rörelsekonstanter så är $w = \{u, v\}$ också en rörelsekonstant. (1p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html` *så småningom.*

Rättningen av tentamen kommer tyvärr ej att kunna påbörjas förrän efter den 27 augusti.

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$