Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-16 46 49

Tentamen i Analytisk Mekanik

9 juni 1999

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-mail, ange din e-mailadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook

1. En partikel med massa m beskrivs av en Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x} - v)^2 - mg(x - vt)$$

där v och g är positiva konstanter.

a) Sätt upp rörelseekvationen och tag fram den allmänna lösningen. (2p)

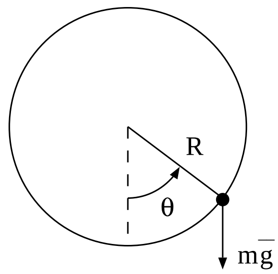
b) Tolka Lagrangefunktionen. Vilket system kan den tänkas beskriva? (1p)

c) Visa att

$$L' = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx$$

ger upphov till samma rörelseekvationer som L. (2p)

2. En partikel med massa m rör sig friktionsfritt på en cirkel med radie R i vertikalplanet under inverkan av gravitationen (plan matematisk pendel).



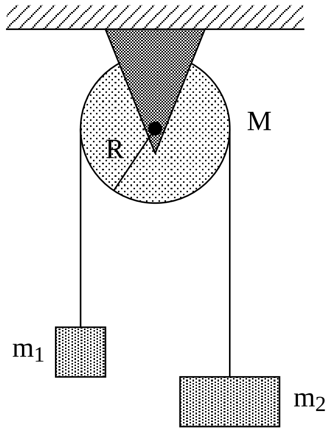
a) Sätt upp Hamiltonfunktionen och Hamiltons kanoniska ekvationer. Lös sedan rörelsen för små utslagsvinklar. (3p)

b) Definiera fasrummet, **P**, och skissera hur lösningskurvorna ser ut för allmänna utslagsvinklar. (2p)

3. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Visa att en genererande funktion $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

4. Betrakta ett system av två massor m_1 och m_2 som sitter ihop med en lätt böjlig tråd. Tråden hänger över en rät homogen cylinder som kan rotera friktionsfritt kring sin horisontellt riktade symmetriaxel. Cylindern har radien R och massan M. Ingen glidning förekommer mellan tråden och cylindern. Antag att massornas rörelse är rent vertikal, dvs att ingen svängning förekommer i sidled. Bestäm systemets rörelse om det släpps när båda massorna m_1 och m_2 samt cylindern är i vila. Endast rörelsen fram till dess någon av massorna nuddar cylindern behöver beaktas. (5p)



5. a) Sätt upp Hamilton-Jacobis tidsoberoende (karakteristiska) ekvation för den reducerade verkansfunktionen $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ då H ej beror explicit av tiden. (2p)

b) Betrakta en fri partikel i en dimension. Tag fram antingen verkansfunktionen $S^*(q, \alpha, t)$ eller den reducerade verkansfunktionen $S(q, \alpha)$ och den transformation den genererar. Tag sedan fram lösningen till rörelseekvationerna, $\{q(t), p(t)\}$. (3p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html` *efter tentamen.*

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$