Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-16 46 49

Tentamen i Analytisk Mekanik

28 maj 1999

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-mail, ange din e-mailadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook

1. Antag att vi för en partikel i en dimension har Lagrangefunktionen $L = L(q, \dot{q}, t)$ vilken uppfyller Lagranges ekvationer.

a) Visa att $L' = L + dM(q,t)/dt$ ger samma rörelseekvationer som L. (4p)

b) Visa att $L' = \alpha L$, där $\alpha \neq 0$ är en konstant ger samma rörelseekvationer som L. (1p)

2. För en laddad partikel i ett elektromagnetiskt fält gäller följande rörelseekvation

$$m\ddot{\vec{q}} = e\vec{E}(\vec{q},t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{q}}(t) \times \vec{B}(\vec{q},t)$$

där högerledet är Lorentzkraften. Visa att vi kan erhålla samma rörelseekvation från Lagranges ekvationer med den generaliserade potentialen

$$U(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = e\Phi(\vec{q},t) - \frac{e}{c}\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q},t)$$

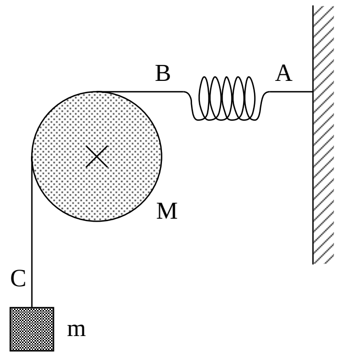
där Φ och $\vec{A}$ är skalär- respektive vektorpotentialen för de elektromagnetiska fälten. Tag även fram den kanoniska rörelsemängden och diskutera detta uttryck. (5p)
Ledning: De elektriska och magnetiska fälten ges av

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{q},t) &= -\nabla_q \Phi(\vec{q},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{q},t) \\ \vec{B}(\vec{q},t) &= \nabla_q \times \vec{A}(\vec{q},t) \end{aligned}$$

3. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Visa att en genererande funktion $\Phi(q, Q, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

4. En rät homogen cylinder med radien R och massan M kan rotera friktionsfritt kring sin symmetriaxel. Denna är horisontellt riktad, parallell med en vertikal vägg. En fjäder AB med fjäderkonstanten k är fäst vid väggen och i en tunn, böjlig, oelastisk tråd BC som löper över cylindern vinkelrätt mot symmetriaxeln. Ingen glidning förekommer mellan tråden och cylindern. I punkten C på tråden hänger en massa m (som påverkas av gravitationen). Tråden och fjädern har försumbara massor.



a) Bestäm jämviktsläget. (2p)

b) Bestäm systemets rörelse om det släpps från vila i ett läge när fjädern intar sin naturliga längd. (3p)

5. a) Sätt upp Hamilton-Jacobis (tidsberoende) ekvation för verkansfunktionen $S^*(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ och tag fram Hamilton-Jacobis karakteristiska (tidsoberoende) ekvation för den reducerade verkansfunktionen $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\alpha})$ då H ej beror explicit av tiden. (2p)

b) Betrakta en endimensionell harmonisk oscillator med potentialen $U(q) = \frac{1}{2}kq^2$. Tag fram antingen verkansfunktionen $S^*(q, \alpha, t)$ eller den reducerade verkansfunktionen $S(q, \alpha)$ och den transformation den genererar. Tag sedan fram lösningen till rörelseekvationerna, $\{q(t), p(t)\}$. (3p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html` *efter tentamen.*

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$