Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

24 augusti 2007

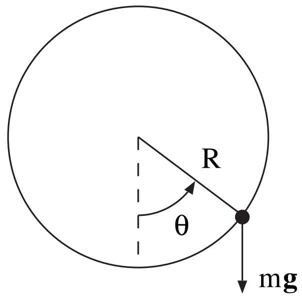
9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En partikel med massa m rör sig friktionsfritt på en cirkel med radie R i vertikalplanet under inverkan av gravitationen (plan matematisk pendel).

a) Sätt upp Hamiltonfunktionen och Hamiltons kanoniska ekvationer. Lös sedan rörelsen för små utslagsvinklar. (3p)

b) Definiera fasrummet, **P**, och skissera hur lösningskurvorna ser ut för allmänna utslagsvinklar. (2p)



Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Visa att en genererande funktion $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

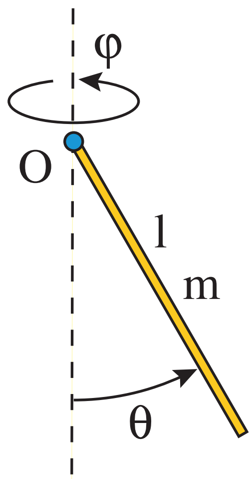
3. En rak, homogen och tunn stång med massan m och längden l kan rotera friktionsfritt kring en fix led vid O (se figur).

a) Om θ är utslagsvinkeln från vertikallinjen och φ är den azimutala vinkeln för rotationen kring densamma (se figur), visa att den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{ml^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

(2p)

b) Initialt rör sig stången horisontellt (dvs med $\theta = \pi/2$ och $\dot{\theta} = 0$) med vinkelhastigheten $\dot{\varphi} = \omega_0$ runt vertikalaxlen. Under den följande rörelsen kommer stången under inverkan av gravitationen att börja vrida sig nedåt. Beräkna $\dot{\varphi}$ som funktion av θ och bestäm vändläget för θ-rörelsen. (3p)



4 Betrakta ett system med f frihetsgrader som beskrivs av en Lagrangefunktion $L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$ utan explicit tidsberoende.

a) Visa att Hamiltonfunktionen för detta system är bevarad, d v s att $\frac{dH}{dt} = 0$. (2p)

b) Antag vidare att L är given på den naturliga formen

$$L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) = T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) - U(\underset{\sim}{q})$$

där T är den kinetiska och U den potentiella energin (som i detta fall ej beror av $\underset{\sim}{\dot{q}}$). Visa att om T är en homogen funktion av grad 2 i $\underset{\sim}{\dot{q}}$, d v s om

$$T = \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} c_{jk}(\underset{\sim}{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

så ges Hamiltonfunktionen av $H = T + U$, d v s den är lika med den totala energin. (3p)

Ledning: Det kan vara praktiskt att först visa Eulers teorem för en homogen funktion av grad 2,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

5. Funktionalen $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ antar ett extremvärde då variationsproblemets Euler-ekvation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

är uppfylld.

a) Visa att Euler-ekvationen ovan är ekvivalent med

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

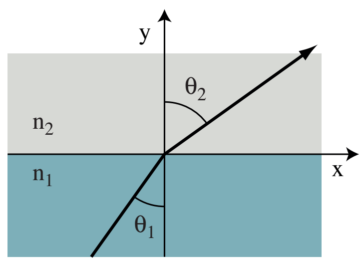
Denna ekvation kallas ibland för variationsproblemets första integral. (2p)

b) Betrakta nu Fermats princip som säger att ljusstrålar tar den väg som går snabbast och visa Snells brytningslag, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ där n_1 och n_2 är brytningsindex i de två materialen. (3p)

Ledning: Med koordinatsystem enligt figur kan Fermats princip uttryckas som att funktionalen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ska anta ett extremvärde.



Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.