Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

19 mars 2007

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. a) Betrakta en stel kropp som har rotationssymmetri kring z-axeln. Visa att tröghetstensorn med avseende på masscentrum är diagonal, dvs att alla tröghetsprodukter är noll. (1p)

b) Betrakta en stel kropp som har spegelsymmetri i xy-planet. Visa att tröghetsprodukterna $I_{xz} = I_{yz} = 0$. (1p)

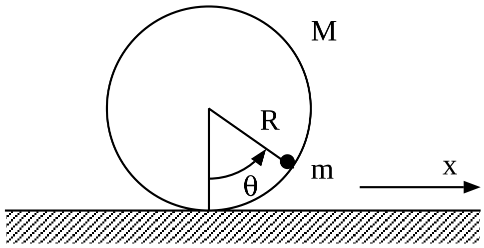
c) Betrakta en stel kropp som består av två homogena klot (med massan m och radien r) som precis rör varandra (och sitter fast i varandra i beröringspunkten). Inför ett lämpligt koordinatsystem och beräkna tröghetstensorn med avseende på masscentrum. (3p)

Ledning: För ett homogent klot med massan m och radien r är tröghetsmomentet med avseende på en godtycklig axel som går genom masscentrum

$$I = \frac{2}{5} m r^2$$

Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

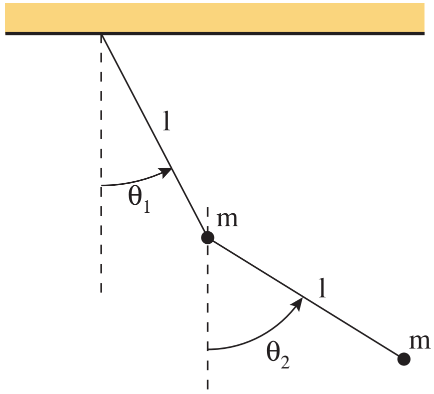
2. En partikel med massan m kan röra sig på insidan av ett cylindriskt skal med massan M och radien R. Cylindern kan rulla utan att glida på ett plant underlag och friktionen mellan massan m och cylinderskalet är försumbar.



a) Ställ upp Lagrangefunktionen och tag med hjälp av denna fram rörelseekvationerna om rörelsen antas ske endast i figurens plan (dvs massan m rör sig ej i cylinderns längdriktning). (3p)

b) Om x är cylinderns läge, lös rörelseekvationerna för $x = x(\theta)$ då systemet startas vid $t = 0$ med $x = \dot{x} = \dot{\theta} = 0$ och $\theta = \pi/2$. (2p)

3. Betrakta en dubbelpendel bestående av två massor m fästa med två masslösa stavar med längden l. Den övre pendeln är fäst i en fix punkt medan den undre pendeln är fäst i den övre massan enligt vidstående figur. Pendeln befinner sig i ett homogent gravitationsfält med tyngdaccelerationen g riktad nedåt i figuren.



a) Visa att rörelseenergin för de två massorna ges av

$$T = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

(2p)

b) Tag fram rörelseekvationerna för de två massorna och bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar kring jämviktsläget. Rörelsen kan antas ske i ett plan. (3p)

4 Antag att vi har ett system med f frihetsgrader, generaliserade koordinater $\underset{\sim}{q}$ och Lagrangianen $L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}, t)$.

a) Visa att

$$L'(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}, t) = L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}, t) + \frac{d}{dt}M(\underset{\sim}{q}, t)$$

ger samma rörelseekvationer som L. (3p)

b) Antag nu att L inte har något explicit tidsberoende, dvs att $L = L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$. Visa att Hamiltonfunktionen för detta system är en rörelsekonstant, dvs att $\frac{dH}{dt} = 0$. (2p)

5. Betrakta en partikel med massan m som rör sig i en dimension i ett homogent gravitationsfält. Den beskrivs av Hamiltonfunktionen (g är tyngdaccelerationen)

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

a) Tag fram en valfri kanonisk icke-trivial transformation (dvs inte identitetstransformationen eller liknande) för detta system. Visa att transformationen är kanonisk (om det inte är uppenbart från det sätt du har tagit fram transformationen). (3p)

b) Utför transformationen i a) och lös rörelseekvationerna för detta transformerade system. Transformera sedan tillbaka till våra ursprungliga kanoniska variabler $\{q, p\}$, och ange hur lösningen $\{q(t), p(t)\}$ ser ut. (2p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.