Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

25 augusti 2006

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. Betrakta en stel kropp.

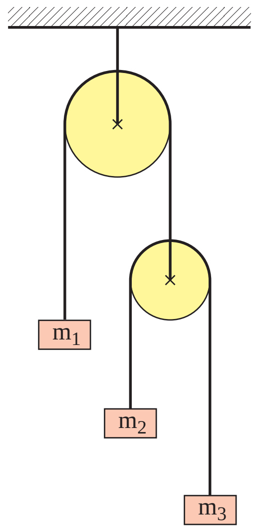
a) Visa att vinkelfrekvensvektorn ω är entydig, dvs oberoende av vilken referenspunkt som väljs i en roterande stel kropp. (3p)

b) Visa att för tröghetstensorns komponenter gäller att $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$. För vilka kroppar gäller likhet? (2p)

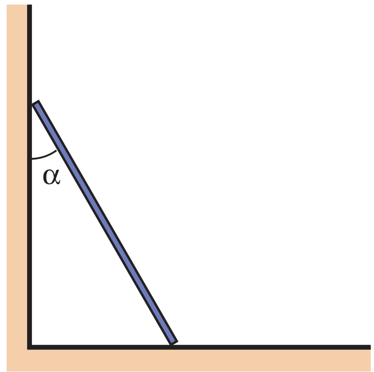
Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. En dubbel Atwood-maskin (se figur) består av tre massor m_1, m_2 och m_3 förbundna med masslösa trådar. Trådarna löper i sin tur över två masslösa trissor som kan rotera friktionsfritt runt sina symmetriaxlar. Massorna påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren.

Sätt upp rörelseekvationerna för systemet och lös dessa. Rörelsen för de tre massorna kan antas ske helt vertikalt. (5p)



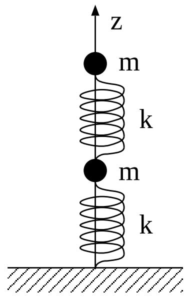
3. En stege står på en altan lutad mot en nyoljad vägg (mot vilken friktionen är försumbar) med lutningsvinkeln α (se figur). Det börjar plötsligt att regna, varvid friktionen mellan stegen och altanen försvinner. Stegen börjar då glida ner mot altanen under inverkan av gravitationen. Stegen har längden l, massan m och kan approximeras med en tunn homogen rektangulär skiva.



a) Tag fram rörelseekvationerna för stegens rörelse så länge den är i kontakt med väggen. (3p)

b) Kommer stegen under fallet att förlora kontakten med väggen? Om så är fallet, vid vilken vinkel sker detta? (2p)

4. Betrakta ett system med två massor med massan m och två fjädrar med fjäderkonstanten k och den naturliga längden a enligt figur. Massorna kan röra sig vertikalt längs med z-axeln och påverkas således av både krafterna från fjädrarna och gravitationskraften. Bestäm systemets vinkelfrekvenser.



Ledning: Lösningarna till ett system av andra ordningens differentialekvationer på formen

$$\ddot{\underset{\sim}{y}} = \mathbf{A}\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{B}$$

kan skrivas som $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}_h + \underset{\sim}{y}_p$ *där* $\underset{\sim}{y}_p$ *är partikulärlösningen till ekvationen ovan och* $\underset{\sim}{y}_h$ *är lösningen till den homogena ekvationen* $\ddot{\underset{\sim}{y}} = \mathbf{A}\underset{\sim}{y}$. $\underset{\sim}{y}_h$ *ges av en linjärkombination av de lösningar som erhålls genom att sätta in ansatsen*

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{a}\cos(\omega t + \delta)$$

i den homogena ekvationen.

5. Betrakta en partikel med massan m i ett homogent gravitationsfält. Partikeln kan röra sig både horisontellt (i x-led) och vertikalt (i y-led).

a) Ställ upp och lös Hamilton-Jacobis ekvation för detta system, d.v.s. tag fram den genererande funktionen (verkansfunktionen) $S(x, y, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ för detta system. (3p)

b) Använd den genererande funktion S du tog fram i a) för att transformera till nya kanoniska variabler $(Q_1, Q_2, P_1 = \alpha_1, P_2 = \alpha_2)$. Lös Hamiltons ekvationer i dessa variabler och transformera tillbaka till de ursprungliga variablerna för att på så sätt ta fram lösningen $(x(t), y(t))$ om partikeln vid $t = 0$ startar vid höjden h med en enbart horisontell hastighet v_0, d.v.s. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = h$, $\dot{y}(0) = 0$. (2p)

Ledning: Det finns många möjliga lösningar S till Hamilton-Jacobis ekvation. En möjlig lösning för detta problem är

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x + \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y\right)^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 t$$

där α_1 och α_2 är de nya konstanta rörelsemängderna. Om du ej lyckas ta fram en genererande funktion i a), kan du använda denna för att lösa b)-uppgiften.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.