Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

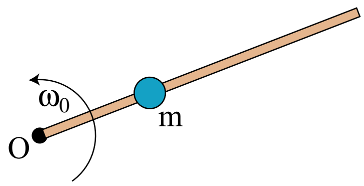
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

20 mars 2006

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En partikel med massa m kan röra sig friktionsfritt längs en rak stång. Stången roterar i horisontalplanet kring den fixa punkten O med en konstant vinkelhastighet ω_0. Bestäm massan ms rörelse om den vid $t = 0$ startar på avståndet a från O och utan hastighet längs med stången. Endast rörelsen så länge massan m har kontakt med stången behöver beaktas. (5p)



Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

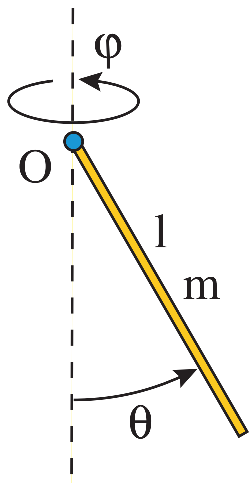
2. En rak, homogen och tunn stång med massan m och längden l kan rotera friktionsfritt kring en fix led vid O (se figur).

a) Om θ är utslagsvinkeln från vertikallinjen och φ är den azimutala vinkeln för rotationen kring densamma (se figur), visa att den kinetiska energin ges av

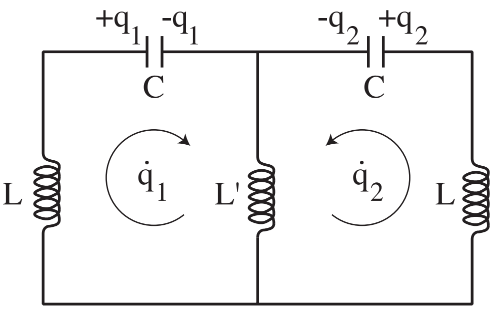
$$T = \frac{ml^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

(2p)

b) Initialt rör sig stången horisontellt (dvs med $\theta = \pi/2$ och $\dot{\theta} = 0$) med vinkelhastigheten $\dot{\varphi} = \omega_0$ runt vertikalaxlen. Under den följande rörelsen kommer stången under inverkan av gravitationen att börja vrida sig nedåt. Beräkna $\dot{\varphi}$ som funktion av θ och bestäm vändläget för θ-rörelsen. (3p)



3. Lagrangeformalismen kan användas även på andra problem än mekaniska. T ex kan den användas på elektriska kretsar. Till en spole med induktansen L kan vi associera en kinetisk energi $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$ där $\dot{q}$ är laddningsflödet genom spolen. Till en kondensator kan vi på liknande sätt associera en potentiell energi $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ där q är laddningen (per platta) och C är kapacitansen. Betrakta kretsen i figuren (pilarna indikerar riktningen på laddningsflödet).



a) Sätt upp Lagrangefunktionen för denna krets och tag fram rörelseekvationerna för laddningarna q_1 och q_2. (2p)

b) Bestäm kretsens egenfrekvenser. (3p)
Ledning: En lämplig ansats till lösning kan vara

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad , \quad a_1,\ a_2 \text{ och } \omega = \text{konstanter}$$

4 a) Betrakta funktionalen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx$$

där $y' = dy/dx$ och f är en funktion av y, y' och x. x_1 och x_2 är två godtyckliga (men fixa) ändpunkter med $y(x_1) = y_1$ och $y(x_2) = y_2$. Visa att om $I[y]$ antar ett extremvärde så uppfyller y Eulers ekvation för variationsproblemet,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(3p)

b) Betrakta två punkter (x_0, y_0) och (x_1, y_1) i xy-planet. Visa att den kortaste vägen mellan dessa två punkter är en rät linje. (2p)
Ledning: Linjeelementet ges av $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx$.

5. Betrakta en partikel med massan m som rör sig i en dimension och beskrivs av Hamiltonfunktionen (k är en konstant)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

a) Tag fram en valfri kanonisk icke-trivial transformation (dvs inte identitetstransformationen eller liknande) för detta system. Visa att transformationen är kanonisk (om det inte är uppenbart från det sätt du har tagit fram transformationen). (3p)

b) Utför transformationen i a) och lös rörelseekvationerna för detta transformerade system. Transformera sedan tillbaka till våra ursprungliga kanoniska variabler $\{q, p\}$, och ange hur lösningen $\{q(t), p(t)\}$ ser ut. (2p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.