Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

26 augusti 2005

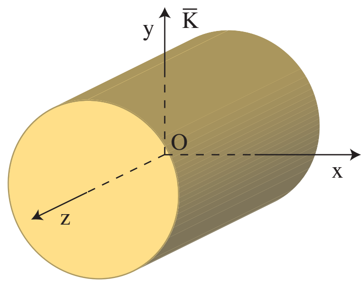
9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En cylinder med radien R och längden L har en inhomogen massfördelning, med densiteten given av

$$\rho(x,y,z) = \rho_0 \frac{y+2R}{2R} \quad ; \quad \rho_0 = \text{konstant}$$

där x, y, och z definieras av vidstående figur med det kroppsfixa koordinatsystemet $\bar{K}$. Origo för $\bar{K}$ ligger i cylinderns geometriska centrum och betecknas O. Beräkna tröghetstensorn m.a.p. O för denna cylinder (dvs i det kroppsfixa systemet $\bar{K}$). (5p)

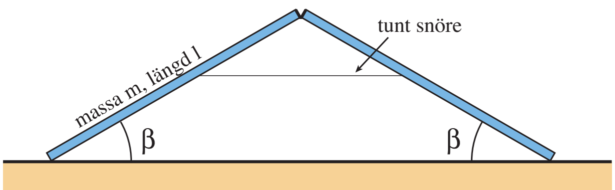


Ledning: Följande integraler kan visa sig användbara:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2} \quad ; \quad \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi a^4}{8} \quad ; \quad \int_{-a}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^4}{8}$$

Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. Två tunna homogena stavar med längden l och massan m är förbundna med ett friktionsfritt gångjärn. De står på ett horisontellt plan och är sammanbundna med ett tunt masslöst snöre så att de bildar vinkeln β mot underlaget (se figur).



Vid tiden $t = 0$ går snöret sönder och stavarna faller under inverkan av gravitationen ner mot planet (rörelsen kan antas ske enbart i figurens plan och friktionen mellan stavarna och det horisontella planet är försumbar).

a) Om θ är vinkeln mellan respektive stav och underlaget (dvs den vinkel som är β vid $t = 0$), visa att den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

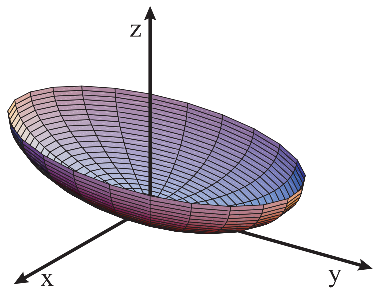
(2p)

b) Tag fram rörelseekvationerna och bestäm hastigheten gångjärnet har när det slår i det horisontella planet. (3p)

3. Ett badkar har formen av en halv ellipsoid, där höjden, z, ges av

$$z = c - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

där a, b och c är konstanter. Du har precis badat och tappat ur vattnet när du tappar tvålen i badkaret. Tvålen beskriver då små svängningar kring jämviktsläget längst ner i badkaret. Bestäm vinkelfrekvensen för dessa! Friktionen mellan tvålen och badkaret kan antas vara försumbar. (5p)



4 a) Redogör för minst två olika sätt som man kan testa om en funktion av de kanoniska variablerna, $f(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$, är en rörelsekonstant. (2p)

b) För ett partikelsystem med två frihetsgrader ges Hamiltonianen av

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2$$

Bestäm ett villkor på a_1 och a_2 så att $f(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) = q_1 p_2 - q_2 p_1$ är en rörelsekonstant. (3p)

5. Betrakta en partikel med massan m i ett homogent gravitationsfält. Partikeln kan röra sig både horisontellt (i x-led) och vertikalt (i y-led).

a) Ställ upp och lös Hamilton-Jacobis ekvation för detta system, d.v.s. tag fram den genererande funktionen (verkansfunktionen) $S^*(x, y, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ för detta system. (3p)

b) Använd den genererande funktion S^* du tog fram i a) för att transformera till nya kanoniska variabler $(Q_1, Q_2, P_1 = \alpha_1, P_2 = \alpha_2)$. Lös Hamiltons ekvationer i dessa variabler och transformera tillbaka till de ursprungliga variablerna för att på så sätt ta fram lösningen $(x(t), y(t))$ om partikeln vid $t = 0$ startar vid höjden h med en enbart horisontell hastighet v_0, d.v.s. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = h$, $\dot{y}(0) = 0$. (2p)

Ledning: Det finns många möjliga lösningar S^* till Hamilton-Jacobis ekvation. En möjlig lösning för detta problem är

$$S^*(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x + \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y\right)^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 t$$

där α_1 och α_2 är de nya konstanta rörelsemängderna. Om du ej lyckas ta fram en genererande funktion i a), kan du använda denna för att lösa b)-uppgiften.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.