Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

18 mars 2005

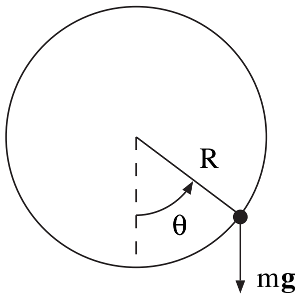
9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En partikel med massa m rör sig friktionsfritt på en cirkel med radie R i vertikalplanet under inverkan av gravitationen (plan matematisk pendel).

a) Sätt upp Hamiltonfunktionen och Hamiltons kanoniska ekvationer. Lös sedan rörelsen för små utslagsvinklar. (3p)

b) Definiera fasrummet, $\mathbf{P}$, och skissera hur lösningskurvorna ser ut för allmänna utslagsvinklar. (2p)



2. En homogen boll med radie R kan rulla utför ett sluttande plan med lutningsvinkeln α (se figur a) till höger).

a) Visa att accelerationen längs med planet ges av

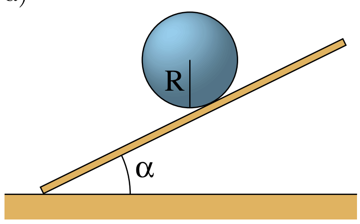
$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha$$

där g är tyngdaccelerationen. (2p)

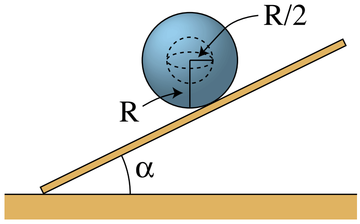
b) Betrakta nu en homogen boll med ett sfäriskt hål i centrum (se figur b) till höger). Det sfäriska hålet har radie $R/2$. Hur stor blir accelerationen för denna boll när den rullar utför planet? Uttryck svaret som hur stor andel av acceleration i a) denna ihåliga boll får. Verkar svaret rimligt? (3p)

Bollarna kan antas röra sig endast i en dimension, rakt ner för planet (dvs de rör sig i figurens plan). De rullar också utan att glida (och utan rullmotstånd).

a)

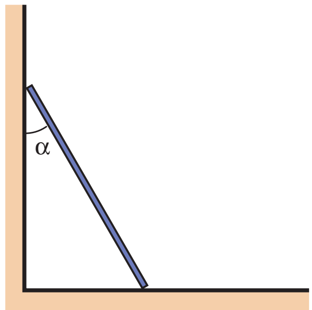


b)



Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 3 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

3. En stege står på en altan lutad mot en nyoljad vägg (mot vilken friktionen är försumbar) med lutningsvinkeln α (se figur). Det börjar plötsligt att regna, varvid friktionen mellan stegen och altanen försvinner. Stegen börjar då glida ner mot altanen under inverkan av gravitationen. Stegen har längden l, massan m och kan approximeras med en tunn homogen rektangulär skiva.



a) Tag fram rörelseekvationerna för stegens rörelse så länge den är i kontakt med väggen. (3p)

b) Kommer stegen under fallet att förlora kontakten med väggen? Om så är fallet, vid vilken vinkel sker detta? (2p)

4. Funktionalen $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ antar ett extremvärde då variationsproblemets Euler-ekvation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

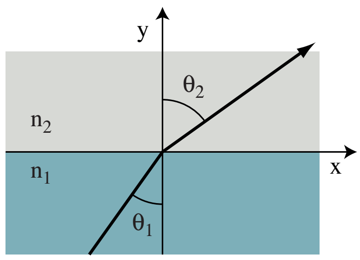
är uppfylld.

a) Visa att Euler-ekvationen ovan är ekvivalent med

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

Denna ekvation kallas ibland för variationsproblemets första integral. (2p)

b) Betrakta nu Fermats princip som säger att ljusstrålar tar den väg som går snabbast och visa Snells brytningslag, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ där n_1 och n_2 är brytningsindex i de två materialen. (3p)



Ledning: Med koordinatsystem enligt figur kan Fermats princip uttryckas som att funktionalen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c}\sqrt{1 + y'^2}dx$$

ska anta ett extremvärde.

5. Utgå från Schrödingerekvationen för en partikel med massan m i en dimension

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

med

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{q}) \quad ; \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$$

a) Ansätt att $\Psi(q,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)}$ (med A = konstant) och tag fram en ekvation som liknar Hamilton-Jacobis ekvation så mycket som möjligt. Hur kan $S^*(q,t)$ tolkas? (3p)

b) I vilken gräns blir ekvationen som härleddes i a) identisk med Hamilton-Jacobis ekvation? Försök att diskutera/tolka ditt svar. (2p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.