



## Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

20 augusti 2004

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.

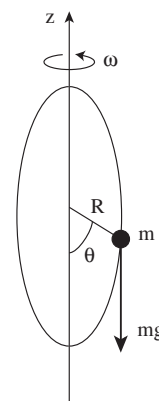
Skriv namn på alla blad!

Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.

*Hjälpmedel:* Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En massa  $m$  kan röra sig friktionsfritt längs en cirkulär tråd (se figur). Tråden roterar kring den vertikala diametern ( $z$ -axeln) med en konstant vinkelhastighet  $\omega$ . Massan  $m$  påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren. Låt  $\theta$  vara vinkeln mellan lodlinjen och massan  $m$  enligt figur.

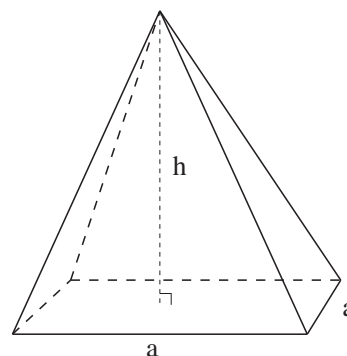
- Tag fram rörelseekvationen för  $\theta$ . (2p)
- Vid låga vinkelhastigheter är  $\theta = 0$  en stabil jämviktspunkt, medan den är labil vid höga vinkelhastigheter. Bestäm den kritiska vinkelhastighet  $\omega_c$  som skiljer dessa två fall åt. (2p)
- Då  $\omega < \omega_c$  är endast  $\theta = 0$  och  $\theta = \pi$  jämviktspunkter, men då  $\omega > \omega_c$  finns ytterligare en jämviktspunkt. Bestäm denna! (1p)



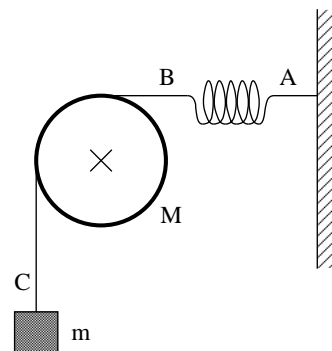
Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. Betrakta en pyramid med massan  $m$ , vars bas är kvadratisk med sidan  $a$  och höjden är  $h$  (se figur).

- Visa att pyramidens masscentrum ligger på höjden  $h/4$  från pyramidens bas. (2p)
- Inför ett lämpligt koordinatsystem och beräkna tröghetstensorn med avseende på pyramidens masscentrum. (3p)



3. Ett cylindriskt skal med radien  $R$  och massan  $M$  kan rotera friktionsfritt kring sin symmetriaxel. Denna är horisontellt riktad, parallell med en vertikal vägg. En fjäder  $AB$  med fjäderkonstanten  $k$  är fäst vid väggen och i en tunn, böjlig, oelastisk tråd  $BC$  som löper över cylindern vinkelrätt mot symmetriaxeln. Ingen glidning förekommer mellan tråden och cylindern. I punkten  $C$  på tråden hänger en massa  $m$  (som påverkas av gravitationen). Tråden och fjädern har försumbara massor och massan  $m$  kan antas röra sig enbart vertikalt.



- a) Bestäm jämviktsläget. (2p)
- b) Bestäm systemets rörelse om det släpps från vila i ett läge när fjädern intar sin naturliga längd. (3p)
4. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)
- b) Utgå från Hamiltons variationsprincip  $\delta \int [\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0$  och visa att en genererande funktion  $S(q, \underline{P}, t)$  kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna  $\{q, p\}$  och de nya variablerna  $\{Q, \underline{P}\}$ . (3p)

*Ledning: Notera att  $\frac{d}{dt} \sum_i Q_i P_i$  kan dras ifrån eller läggas till Hamiltonfunktionen utan att rörelseekvationerna ändras.*

5. a) Betrakta ett autonomt (tidsberoende) system som beskrivs av en Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q})$  som är invariant under någon transformation. Ställ upp och bevisa Noethers teorem för detta system. (3p)
- b) En partikel i tre dimensioner beskrivs av Lagrangefunktionen

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{A}{r + r^3} \quad ; \quad A = \text{konst.}$$

Visa att rörelsemängdsmomentet  $\mathbf{L}$  är en rörelsekonstant. (2p)

**Lycka till!**

*Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på <http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html>.*