Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

1 juni 2004

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

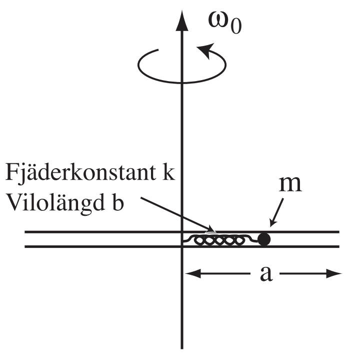
1. a) Definiera tröghetstensorn för en stel kropp med massfördelningen $\rho(\vec{x})$. Ange särskilt hur komponenterna ser ut i ett kartesiskt koordinatsystem. (1p)

b) Visa att om kroppen är spegelsymmetrisk i xy-planet så är $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$. (2p)

c) Visa att för tröghetstensorns komponenter gäller att $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$. För vilka kroppar gäller likhet? (2p)

Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. En massa m kan röra sig friktionsfritt i ett cylindriskt rör med längden $2a$. Röret roterar med vinkelhastigheten ω_0 kring en rotationsaxel som är vinkelrät mot röret och går genom rörets masscentrum (se figur). Massan m är fäst vid rotationsaxeln via en masslös fjäder med vilolängden b och fjäderkonstanten k.



a) Tag fram rörelseekvationerna för massan m så länge massan befinner sig i röret. (2p)

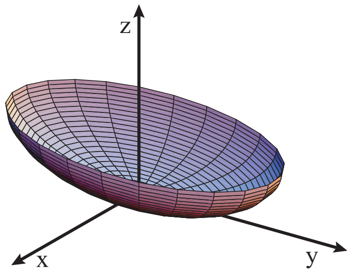
b) Hur ser rörelsen ut (medan massan m befinner sig i röret)? Skissera de olika typer av rörelse vi kan få och bestäm ett villkor på fjäderkonstanten k och vinkelhastigheten ω_0 som skiljer de olika typerna av rörelse åt. (2p)

c) Antag att fjäderkonstanten ges av $k = 2m\omega_0^2$. Om massan m vid $t = 0$ befinner sig på avståndet b från rotationsaxlen och utan hastighet längs med röret, tag fram den fullständiga lösningen till rörelseekvationerna. (1p)

3. Ett badkar har formen av en halv ellipsoid, där höjden, z, ges av

$$z = c - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

där a, b och c är konstanter. Du har precis badat och tappat ur vattnet när du tappar tvålen i badkaret. Tvålen beskriver då små svängningar kring jämviktsläget längst ner i badkaret. Bestäm vinkelfrekvensen för dessa! Friktionen mellan tvålen och badkaret kan antas vara försumbar.



4. Utgå från Hamiltons princip (eller om du föredrar, från det virtuella arbetets princip eller d'Alemberts princip) och härled Lagranges ekvationer

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad \forall\, k = 1, \ldots, f \quad ; \quad f = \text{antalet frihetsgrader}$$

(5p)

5. Genom att använda en kanonisk transformation av typ B kan vi härleda Hamilton-Jacobis ekvation för den genererande funktionen $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ så att den nya Hamilton-funktionen är identiskt lika med noll.

a) Visa att man på samma sätt kan använda en transformation av typ C med en genererande funktion $U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ så att den nya Hamilton-funktionen är identiskt lika med noll. Vilken differentialekvation måste U i så fall uppfylla? (Denna kallas för Hamilton-Jacobis ekvation i rörelsemängdsrepresentationen.) (2p)

b) Använd den ekvation du härledde i a) för att ta fram den genererande funktionen $U(Q, p, t)$ för en partikel som kan röra sig vertikalt i ett homogent gravitationsfält, dvs med Hamiltonfunktionen

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

där q är höjden ovanför horisontalplanet. Använd sedan detta U för att generera en kanonisk transformation som gör problemet trivialt lösbart. Lös rörelseekvationerna för de nya kanoniska variablerna och bestäm sedan rörelsen $\{q(t), p(t)\}$ om begynnelsevillkoren är att $p(t = 0) = mv_0$ och $q(t = 0) = 0$.

Kommentar: Om du föredrar det (eller inte har lyckats lösa a)-uppgiften), får du istället använda den vanliga Hamilton-Jacobis ekvation för $S(q, P, t)$ för att lösa b)-uppgiften.

(3p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.