



Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

22 augusti 2003

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.

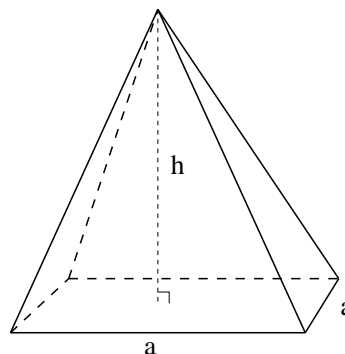
Skriv namn på alla blad!

Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.

Hjälpmedel: Physics Handbook.

1. Betrakta en pyramid med massan m , vars bas är kvadratisk med sidan a och höjden är h (se figur).

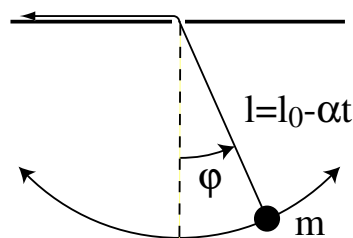
- Visa att pyramidens masscentrum ligger på höjden $h/4$ från pyramidens bas. (2p)
- Inför ett lämpligt koordinatsystem och beräkna tröghetstensorn med avseende på pyramidens masscentrum. (3p)



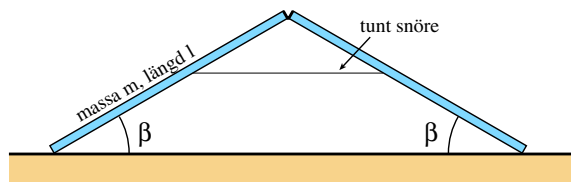
Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. Betrakta en plan matematisk pendel med längden l och massan m . Snöret går genom ett hål och dras igenom detta med konstant hastighet α . Längden på pendeln minskar således med tiden och kan skrivas som $l(t) = l_0 - \alpha t$.

Bestäm Hamiltonianen samt energin för systemet. Är Hamiltonianen en rörelsekonstant? Är energin en rörelsekonstant? Diskutera dina resultat. (5p)



3. Två tunna homogena stavar med längden l och massan m är förbundna med ett friktionsfritt gångjärn. De står på ett horisontellt plan och är sammanbundna med ett tunt masslöst snöre så att de bildar vinkeln β mot underlaget (se figur).



Vid tiden $t = 0$ går snöret sönder och stavarna faller under inverkan av gravitationen ner mot planet (rörelsen kan antas ske enbart i figurens plan och friktionen mellan stavarna och det horisontella planet är försumbar).

- a) Om θ är vinkeln mellan respektive stav och underlaget (dvs den vinkel som är β vid $t = 0$), visa att den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (2p)$$

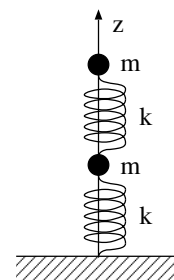
- b) Tag fram rörelseekvationerna och bestäm hastigheten gångjärnet har när det slår i det horisontella planet. (3p)

4. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)
 b) En harmonisk oscillator kan beskrivas av Hamiltonianen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

där q är utslaget från jämviktsläget, k är fjäderkonstanten, m är massan och p den kanoniska rörelsemängden. Skriv ner en valfri icke-trivial transformation (d.v.s. ej identitetstransformationen eller liknande) och bestäm om den är kanonisk eller inte. (3p)

5. Betrakta ett system med två massor med massan m och två fjädrar med fjäderkonstanten k och den naturliga längden a enligt figur. Massorna kan röra sig vertikalt längs med z -axeln och påverkas således av både krafterna från fjädrarna och gravitationskraften. Bestäm systemets vinkelfrekvenser.



Ledning: Lösningarna till ett system av andra ordningens differentialekvationer på formen

$$\ddot{\underline{y}} = \underline{\mathbf{A}}\underline{y} + \underline{\mathbf{B}}$$

kan skrivas som $\underline{y} = \underline{y}_h + \underline{y}_p$ där \underline{y}_p är partikulärlösningen till ekvationen ovan och \underline{y}_h är lösningen till den homogena ekvationen $\ddot{\underline{y}} = \underline{\mathbf{A}}\underline{y}$. \underline{y}_h ges av en linjärkombination av de lösningar som erhålls genom att sätta in ansatsen

$$\underline{y} = \underline{a} \cos(\omega t + \delta)$$

i den homogena ekvationen.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på <http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html>.