Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

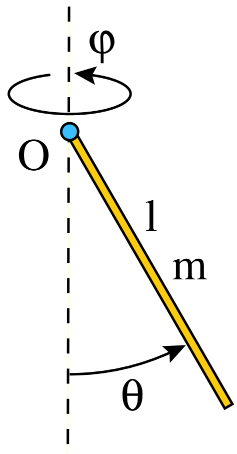
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

2 juni 2003

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook samt bifogad formelsamling.

1. En rak, homogen och tunn stång med massan m och längden l kan rotera friktionsfritt kring en fix led vid O (se figur).



a) Om θ är utslagsvinkeln från vertikallinjen och φ är den azimutala vinkeln för rotationen kring densamma (se figur), visa att den kinetiska energin ges av

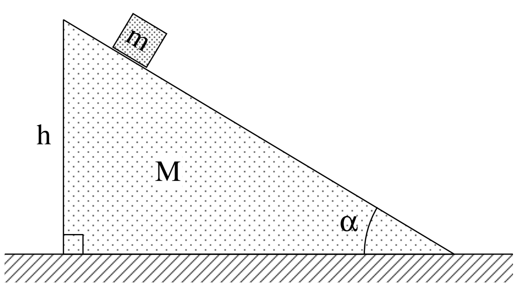
$$T = \frac{ml^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

(2p)

b) Initialt rör sig stången horisontellt (dvs med $\theta = \pi/2$ och $\dot{\theta} = 0$) med vinkelhastigheten $\dot{\varphi} = \omega_0$ runt vertikalaxlen. Under den följande rörelsen kommer stången under inverkan av gravitationen att börja vrida sig nedåt. Beräkna $\dot{\varphi}$ som funktion av θ och bestäm vändläget för θ-rörelsen. (3p)

Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

En massa m kan glida friktionsfritt på en tunn kil med massan M (se figur). Kilen kan i sin tur glida friktionsfritt på ett horisontellt underlag.



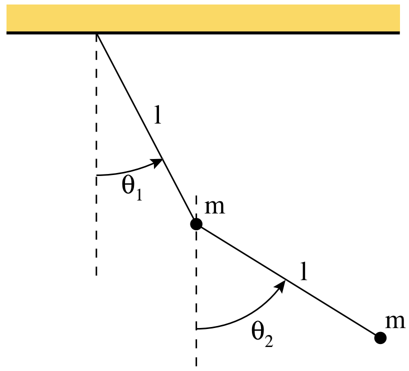
a) Tag fram rörelseekvationerna för kilens och massan ms rörelse. (3p)

b) Om systemet startar i vila, med massan m högst upp på kilen, bestäm hur lång tid det tar innan massan m slår i det horisontella underlaget. Jämför med den tid det skulle ta om massan m istället fick falla fritt. (2p)

Anmärkning: Rörelsen kan antas ske enbart i figurens plan och massan m kan antas vara punktformig.

3. Betrakta en dubbelpendel bestående av två massor m fästa med två masslösa snören med längden l. Den övre pendeln är fäst i en fix punkt medan den undre pendeln är fäst i den övre massan enligt vidstående figur. Pendeln befinner sig i ett homogent gravitationsfält med tyngdaccelerationen g riktad nedåt i figuren.

Tag fram rörelseekvationerna för de två massorna och bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar kring jämviktsläget. Rörelsen kan antas ske i ett plan. (5p)



4. a) Betrakta ett autonomt (tidsoberoende) system som beskrivs av en Lagrangefunktion $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ som är invariant under någon transformation. Ställ upp och bevisa Noethers teorem för detta system. (3p)

b) En partikel i tre dimensioner beskrivs av Lagrangefunktionen

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{A}{r^3} \qquad ; \qquad A = \text{konst.}$$

Visa att rörelsemängdsmomentet $\mathbf{L}$ är en rörelsekonstant. (2p)

5. Betrakta en partikel med massan m i ett homogent gravitationsfält. Partikeln kan röra sig både horisontellt (i x-led) och vertikalt (i y-led).

a) Ställ upp och lös Hamilton-Jacobis ekvation för detta system, d.v.s. tag fram den genererande funktionen (verkansfunktionen) $S^*(x, y, \underset{\sim}{\alpha}, t)$ för detta system. (3p)

b) Använd den genererande funktion S^* du tog fram i a) för att transformera till nya kanoniska variabler $(Q_1, Q_2, P_1 = \alpha_1, P_2 = \alpha_2)$. Lös Hamiltons ekvationer i dessa variabler och transformera tillbaka till de ursprungliga variablerna för att på så sätt ta fram lösningen $(x(t), y(t))$ om partikeln vid $t = 0$ startar vid höjden h med en enbart horisontell hastighet v_0, d.v.s. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = h$, $\dot{y}(0) = 0$. (2p)

Ledning: Det finns många möjliga lösningar S^* till Hamilton-Jacobis ekvation. En möjlig lösning för detta problem är

$$S^*(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x + \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y\right)^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 t$$

där α_1 och α_2 är de nya konstanta rörelsemängderna. Om du ej lyckas ta fram en genererande funktion i a), kan du använda denna för att lösa b)-uppgiften.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.