Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

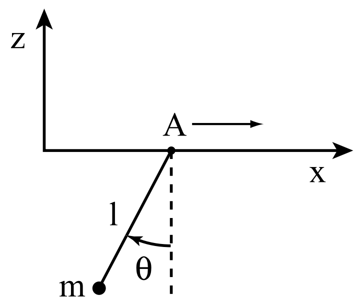
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

23 augusti 2002

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook och bifogad formelsamling.

1. En plan matematisk pendel med massan m och snörlängden l (snörets massa kan försummas) är fäst i en punkt A (se figur) och påverkas av tyngdaccelerationen g nedåt i figuren. Punkten A accelererar med accelerationen g i horisontalplanet.



a) Tag fram rörelseekvationen för pendelns rörelse. (2p)

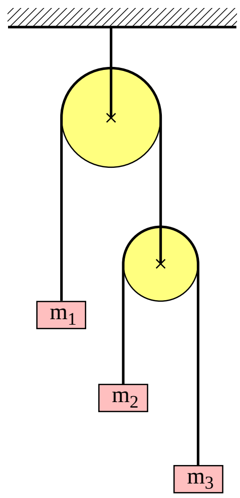
b) För en vanlig pendel där punkten A är i vila beskriver pendeln oscillationer runt $\theta = 0$. Runt vilken vinkel θ_0 beskriver denna pendel med accelererande A oscillationer? (1p)

c) Lös rörelseekvationen för små utslag kring denna jämviktsvinkel och jämför med en vanlig plan pendel med punkten A i vila. (2p)

2. Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra denna uppgift utan får tillgodoräkna dig den ändå.

En dubbel Atwood-maskin (se figur) består av tre massor m_1, m_2 och m_3 förbundna med masslösa trådar. Trådarna löper i sin tur över två masslösa trissor som kan rotera friktionsfritt runt sina symmetriaxlar. Massorna påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren.

Sätt upp rörelseekvationerna för systemet och lös dessa. Rörelsen för de tre massorna kan antas ske helt vertikalt. (5p)



3. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Visa att en genererande funktion $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

4. Betrakta en stel kropp vars tröghetstensor i dess principalsystem ges av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \neq I_1 < I_2 < I_3$$

a) Om kroppen inte utsätts för några externa vridmoment och den sätts i rotation runt en av principalaxlarna (x-, y- eller z-axeln i detta fall) kommer rotationen att fortsätta ske runt denna axel. Visa detta! (2p)

b) Om rotationen i a) utsätts för en liten störning är rotationen stabil (d v s rotationen fortsätter att i huvudsak ske runt den ursprungliga axeln) om den sker runt den axel som har minst eller störst tröghetsmoment, medan den är labil om rotationen sker runt axeln med det mellersta tröghetsmomentet. Visa detta! (3p)

5. Betrakta ett system med f frihetsgrader som beskrivs av en Lagrangefunktion $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ utan explicit tidsberoende.

a) Visa att Hamiltonfunktionen för detta system är bevarad, d v s att $\frac{dH}{dt} = 0$. (2p)

b) Antag vidare att L är given på den naturliga formen

$$L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = T(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) - U(\underset{\sim}{q})$$

där T är den kinetiska och U den potentiella energin (som i detta fall ej beror av $\dot{\underset{\sim}{q}}$). Visa att om T är en homogen funktion av grad 2 i $\dot{\underset{\sim}{q}}$, d v s om

$$T = \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} c_{jk}(\underset{\sim}{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

så ges Hamiltonfunktionen av $H = T + U$, d v s den är lika med den totala energin. (3p)

Ledning: Det kan vara praktiskt att först visa Eulers teorem för en homogen funktion av grad 2,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.