Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

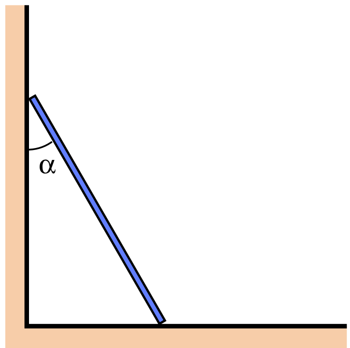
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

1 juni 2002

8–14

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook samt bifogad formelsamling.

1. En stege står på en altan lutad mot en nyoljad vägg (mot vilken friktionen är försumbar) med lutningsvinkeln α (se figur). Det börjar plötsligt att regna, varvid friktionen mellan stegen och altanen försvinner. Stegen börjar då glida ner mot altanen under inverkan av gravitationen. Stegen har längden l, massan m och kan approximeras med en tunn homogen rektangulär skiva.



a) Tag fram rörelseekvationerna för stegens rörelse så länge den är i kontakt med väggen. (3p)

b) Kommer stegen under fallet att förlora kontakten med väggen? Om så är fallet, vid vilken vinkel sker detta? (2p)

2. Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra denna uppgift utan får tillgodoräkna dig den ändå.

Betrakta en homogen rät cirkulär cylinder med massan m, radien R och höjden h.

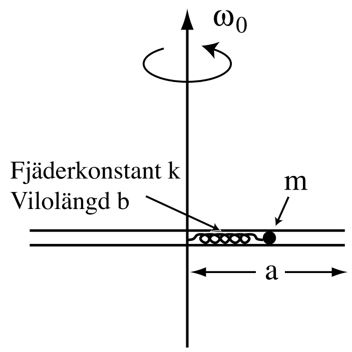
a) Inför ett kroppsfixt koordinatsystem med origo i cylinderns masscentrum och med z-axeln längs med cylinderns symmetriaxel. Visa att tröghetstensorn i detta system ges av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m\left(h^2+3R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m\left(h^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$$

(2p)

b) Sätt nu snurr på cylindern så att den roterar kring en *godtycklig* rotationsaxel genom dess masscentrum. Hur måste radien R och höjden h förhålla sig till varandra för att cylindern ska fortsätta att rotera runt samma rotationsaxel (d v s ej precessera eller wobbla) oavsett hur denna initialt är riktad? Inga yttre vridmoment antas verka på cylindern. (3p)

3. En massa m kan röra sig friktionsfritt i ett cylindriskt rör med längden $2a$. Röret roterar med vinkelhastigheten ω_0 kring en rotationsaxel som är vinkelrät mot röret och går genom rörets masscentrum (se figur). Massan m är fäst vid rotationsaxeln via en masslös fjäder med vilolängden b och fjäderkonstanten k.

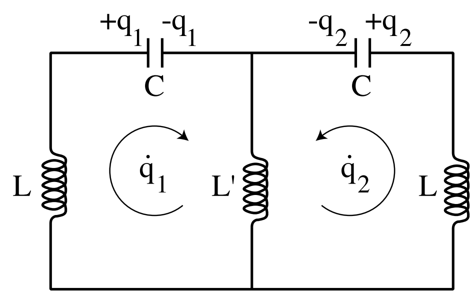


a) Tag fram rörelseekvationerna för massan m så länge massan befinner sig i röret. (2p)

b) Hur ser rörelsen ut (medan massan m befinner sig i röret)? Skissera de olika typer av rörelse vi kan få och bestäm ett villkor på fjäderkonstanten k och vinkelhastigheten ω_0 som skiljer de olika typerna av rörelse åt. (2p)

c) Antag att fjäderkonstanten ges av $k = 2m\omega_0^2$. Om massan m vid $t = 0$ befinner sig på avståndet b från rotationsaxeln och utan hastighet längs med röret, tag fram den fullständiga lösningen till rörelseekvationerna. (1p)

4. Lagrangeformalismen kan användas även på andra problem än mekaniska. T ex kan den användas på elektriska kretsar. Till en spole med induktansen L kan vi associera en kinetisk energi $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$ där $\dot{q}$ är laddningsflödet genom spolen. Till en kondensator kan vi på liknande sätt associera en potentiell energi $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ där q är laddningen (per platta) och C är kapacitansen. Betrakta kretsen i figuren (pilarna indikerar riktningen på laddningsflödet).



a) Sätt upp Lagrangefunktionen för denna krets och tag fram rörelseekvationerna för laddningarna q_1 och q_2. (2p)

b) Bestäm kretsens egenfrekvenser. (3p)

Ledning: En lämplig ansats till lösning kan vara

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad , \quad a_1,\ a_2 \text{ och } \omega = \text{konstanter}$$

5. Betrakta en partikel med massan m som rör sig i en dimension under inverkan av en extern kraft $F(t)$. Den externa kraften $F(t)$ beror endast av tiden och ej av vare sig läget x eller hastigheten $\dot{x}$ för partikeln.

a) Tag fram Hamilton-Jacobis ekvation för $S(x, P, t)$ för detta system. (2p)

b) Antag nu att $F(t) = A \sin \omega_0 t$ och lös Hamilton-Jacobis ekvation för $S(x, P, t)$. Använd denna genererande funktion för att generera den kanoniska transformationen och tag fram lösningen till rörelseekvationerna om $x(0) = 0, p(0) = 0$. (3p)

Ledning: En lämplig separationsansats kan vara $S(x, P, t) = S_1(t)x + S_2(t)$. När Hamilton-Jacobis ekvation löses kan man även ansätta att termer av olika ordning i x är noll oberoende av varandra.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas tillgängliga på
`http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.