Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

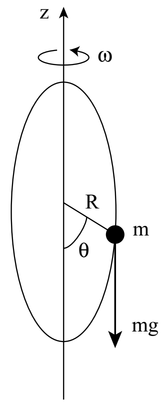
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

2 juni 2001

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger maximalt 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook.

1. En massa m kan röra sig friktionsfritt längs en cirkulär tråd (se figur). Tråden roterar kring den vertikala diametern (z-axeln) med en konstant vinkelhastighet ω. Massan m påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren. Låt θ vara vinkeln mellan lodlinjen och massan m enligt figur.



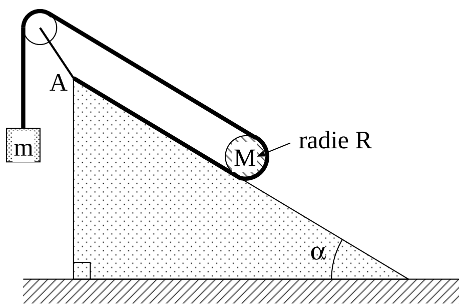
a) Tag fram rörelseekvationen för θ. (2p)

b) Vid låga vinkelhastigheter är $\theta = 0$ en stabil jämviktspunkt, medan den är labil det vid höga vinkelhastigheter. Bestäm den kritiska vinkelhastighet ω_c som skiljer dessa två fall åt. (2p)

c) Då $\omega < \omega_c$ är endast $\theta = 0$ och $\theta = \pi$ jämviktspunkter, men då $\omega > \omega_c$ finns ytterligare en jämviktspunkt. Bestäm denna! (1p)

Om du är godkänd på inlämningsuppgifterna behöver du ej göra uppgift 2 nedan utan får tillgodoräkna dig den ändå.

2. En homogen cylinder med massa M och radie R kan rulla utan friktion på en fix kil med toppvinkeln α (se figur). Runt cylindern löper ett tunt snöre (med försumbar massa) vars ena ände är fäst i punkten A och vars andra ände är fäst i en massa m. Snöret löper över en friktionsfri och masslös trissa vid A. Massorna m och M påverkas av gravitationskraften nedåt i figuren.



a) Tag fram och lös rörelseekvationen för rörelsen hos massan m. (3p)

b) Bestäm den toppvinkel α för vilken systemet befinner sig i jämvikt. (2p)

3. a) Om f, g och h är funktioner av de kanoniska variablerna, visa att följande egenskaper gäller för Poisson-parenteserna

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= g\{f, h\} + \{f, g\}h \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g \end{aligned}$$

(2p)

b) Betrakta en partikel i tre dimensioner som rör sig i potentialen

$$U = \alpha z^2 e^{\beta x^2 + \gamma y^2} \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{konstanter}, \quad \alpha \neq 0.$$

Bestäm ett villkor på β och γ så att rörelsemängdsmomentets z-komponent är bevarad (för godtyckliga begynnelsevillkor). (3p)

4. a) Betrakta funktionalen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx$$

där $y' = dy/dx$ och f är en funktion av y, y' och x. x_1 och x_2 är två godtyckliga (men fixa) ändpunkter med $y(x_1) = y_1$ och $y(x_2) = y_2$. Visa att om $I[y]$ antar ett extremvärde så uppfyller y Eulers ekvation för variationsproblemet,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(3p)

b) Betrakta två punkter (x_0, y_0) och (x_1, y_1) i xy-planet. Visa att den kortaste vägen mellan dessa två punkter är en rät linje. (2p)

Ledning: Linjeelementet ges av $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx$.

5. Genom att använda en kanonisk transformation av typ B kan vi härleda Hamilton-Jacobis ekvation för den genererande funktionen $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ så att den nya Hamilton-funktionen är identiskt lika med noll.

a) Visa att man på samma sätt kan använda en transformation av typ C med en genererande funktion $U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ så att den nya Hamilton-funktionen är identiskt lika med noll. Vilken differentialekvation måste U i så fall uppfylla? (Denna kallas för Hamilton-Jacobis ekvation i rörelsemängdsrepresentationen.) (2p)

b) Använd den ekvation du härledde i a) för att ta fram den genererande funktionen $U(Q, p, t)$ för en partikel som kan röra sig vertikalt i ett homogent gravitationsfält, dvs med Hamiltonfunktionen

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

där q är höjden ovanför horisontalplanet. Använd sedan detta U för att generera en kanonisk transformation som gör problemet trivialt lösbart. Lös rörelseekvationerna för de nya kanoniska variablerna och bestäm sedan rörelsen $\{q(t), p(t)\}$ om begynnelsevillkoren är att $p(t = 0) = mv_0$ och $q(t = 0) = 0$. (3p)

Lycka till!

Lösningar kommer så småningom att anslås samt finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Noethers teorem

Om Lagrangefunktionen $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen $\underset{\sim}{q} \to h^s(\underset{\sim}{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $h^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen så är

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h^s(q_i) \bigg|_{s=0}$$

en rörelsekonstant.