Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

25 augusti 2000

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook.

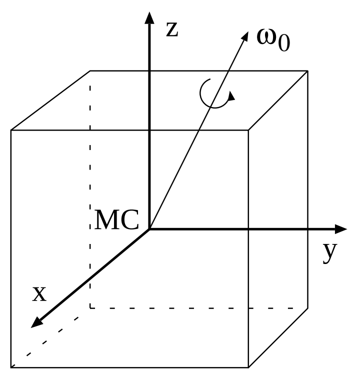
1. Betrakta en homogen kub med sidan a och massan M.

a) Inför ett kartesiskt koordinatsystem i masscentrum MC enligt figur och beräkna tröghetstensorn. (3p)

b) Kuben roterar med vinkelhastigheten ω_0 kring en axel genom masscentrum. Visa att rotationsenergin är given av

$$T = \frac{Ma^2\omega_0^2}{12}$$

oberoende av rotationsaxelns riktning. (2p)



2. Antag att vi för en partikel i en dimension har Lagrangefunktionen $L = L(q, \dot{q}, t)$ vilken uppfyller Lagranges ekvationer.

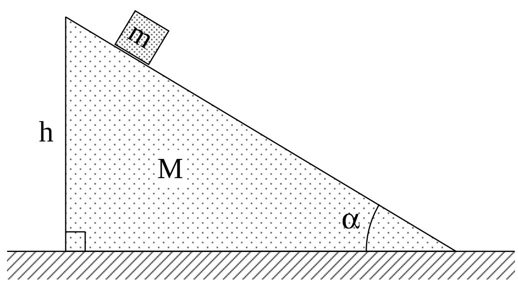
a) Visa att $L' = L + dM(q,t)/dt$ ger samma rörelseekvationer som L. (4p)

b) Visa att $L' = \alpha L$, där $\alpha \neq 0$ är en konstant ger samma rörelseekvationer som L. (1p)

3. En massa m kan glida friktionsfritt på en tunn kil med massan M (se figur). Kilen kan i sin tur glida friktionsfritt på ett horisontellt underlag.

a) Tag fram rörelseekvationerna för kilens och massan ms rörelse. (3p)

b) Om systemet startar i vila, med massan m högst upp på kilen, bestäm hur lång tid det tar innan massan m slår i det horisontella underlaget. Jämför med den tid det skulle ta om massan m istället fick falla fritt. (2p)

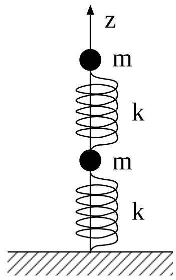


Not: Rörelsen kan antas ske enbart i figurens plan och massan m kan antas vara punktformig.

4. a) Definiera begreppet kanonisk transformation och redogör för hur en genererande funktion kan användas för att generera transformationen. (2p)

b) Visa att en genererande funktion $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation och tag fram de variabelsamband som då gäller mellan de gamla variablerna $\{\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}\}$ och de nya variablerna $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}\}$. (3p)

5. Betrakta ett system med två massor med massan m och två fjädrar med fjäderkonstanten k och den naturliga längden a enligt figur. Massorna kan röra sig vertikalt längs med z-axeln och påverkas således av både krafterna från fjädrarna och gravitationskraften. Bestäm systemets vinkelfrekvenser.



Ledning: Lösningarna till ett system av andra ordningens differentialekvationer på formen

$$\ddot{\underset{\sim}{y}} = \mathbf{A}\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{B}$$

kan skrivas som $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}_h + \underset{\sim}{y}_p$ *där* $\underset{\sim}{y}_p$ *är partikulärlösningen till ekvationen ovan och* $\underset{\sim}{y}_h$ *är lösningen till den homogena ekvationen* $\ddot{\underset{\sim}{y}} = \mathbf{A}\underset{\sim}{y}$. $\underset{\sim}{y}_h$ *ges av en linjärkombination av de lösningar som erhålls genom att sätta in ansatsen*

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{a}\cos(\omega t + \delta)$$

i den homogena ekvationen.

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på *`http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html`*.

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$