Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

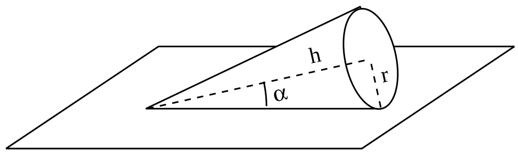
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

27 maj 2000

9–15

5 problem på 6 timmar. Varje problem ger 5 poäng.
Skriv namn på alla blad!
Om du vill ha resultatet skickat till dig per e-post, ange din e-postadress på första sidan.
Hjälpmedel: Physics Handbook

1. En homogen kon med massan m, höjden h och toppvinkeln 2α rullar utan att glida på ett plan. Vinkelhastigheten i ett givet ögonblick är ω_0. Beräkna rörelseenergin. (5p)



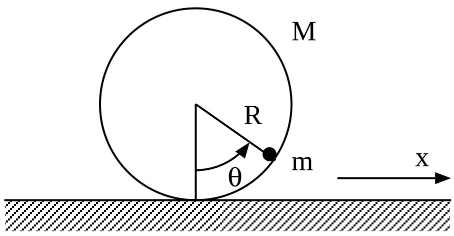
2. Betrakta en partikel i tre dimensioner med massan m som rör sig i potentialen

$$U(\mathbf{r}) = \alpha z^2 e^{\beta(x^2+y^2)} \quad ; \quad \alpha, \beta = \text{konstanter}$$

a) Visa att den totala energin (kinetisk + potentiell) är bevarad. (2p)

b) Visa att rörelsemängdsmomentets z-komponent är bevarad. (3p)

3. En partikel med massan m kan röra sig på insidan av ett cylindriskt skal med massan M och radien R. Cylindern kan rulla friktionsfritt på ett plant underlag och friktionen mellan massan m och cylinderskalet är försumbar.



a) Ställ upp Lagrangefunktionen och tag med hjälp av denna fram rörelseekvationerna om rörelsen antas ske endast i figurens plan (dvs massan m rör sig ej i cylinderns längdriktning). (3p)

b) Om x är cylinderns läge, lös rörelseekvationerna för $x = x(\theta)$ då systemet startas vid $t = 0$ med $x = \dot{x} = \dot{\theta} = 0$ och $\theta = \pi/2$. (2p)

4. a) Ställ upp Liouvilles teorem för flöden i fasrummet. (2p)

b) Härled teoremet. (3p)

5. Utgå från Schrödingerekvationen för en partikel med massan m i en dimension

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

med

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{q}) \quad ; \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$$

a) Ansätt att $\Psi(q,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)}$ (med $A =$ konstant) och tag fram en ekvation som liknar Hamilton-Jacobis ekvation så mycket som möjligt. Hur kan $S^*(q,t)$ tolkas? (3p)

b) I vilken gräns blir ekvationen som härleddes i a) identisk med Hamilton-Jacobis ekvation? Försök att diskutera/tolka ditt svar. (2p)

Lycka till!

Lösningar kommer att finnas anslagna efter tentamen. De kommer även att finnas tillgängliga på `http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html`.

Formelsamling

Kanoniska transformationer

Typ A. $\Phi = \Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial\Phi}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Typ B. $S = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ - genererande funktion

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Typ C. $U = U(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Typ D. $V = V(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{p}, t)$ - genererande funktion

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Noethers teorem

Om Lagrangefunktionen $L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen $\underset{\sim}{q} \to h^s(\underset{\sim}{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $h^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen så är

$$I(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{ds}h^s(q_i)\Bigg|_{s=0}$$

en rörelsekonstant.