Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-16 46 49

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

20 augusti 1999

Uppgift 1

a) Välj θ som vår generaliserade koordinat. Hastigheten ges då av $v = R\dot{\theta}$ och höjden över det nedre jämviktsläget är $z = R(1-\cos\theta)$. Lagrangefunktionen ges då av

$$L(\theta,\dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mgR(1-\cos\theta)$$

Den kanoniska impulsen ges av

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

och vi kan nu skriva Hamiltonfunktionen som

$$H(\theta,p_\theta) = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{mR^2}{2}\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + mgR(1-\cos\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + mgR(1-\cos\theta)$$

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & = & \frac{p_\theta}{mR^2 l} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} & = & -mgR\sin\theta \end{array}\right.$$

För små svängningar kan vi sätta $\sin\theta \simeq \theta$,

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & = & \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} & = & -mgR\theta \end{array}\right.$$

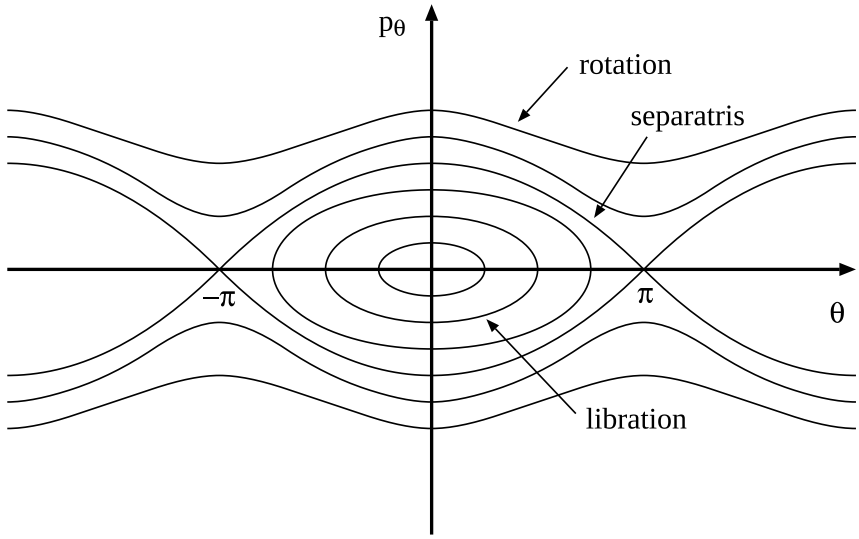
Derivera den andra ekvationen med avseende på tiden och sätt in uttrycket för $\dot{\theta}$ från den första ekvationen så får vi

$$\ddot{p}_\theta = -mgR\dot{\theta} = -\frac{g}{R}p_\theta$$

Denna löses enkelt och vi får lösningen

$$\left\{\begin{array}{lll} p_\theta & = & A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\theta + \theta_0\right) \\ \theta & = & \frac{A}{mR\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\theta + \theta_0\right) \end{array}\right.$$

b) Fasrummet, $\mathbf{P}$, spänns upp av $\{\theta, p_\theta\}$ och för allmänna utslagsvinklar har vi följande fasporträtt:



För små utslagsvinklar är lösningskurvorna (nästan) elipser. För så stora utslagsvinklar att pendeln slår över har vi rotation. När rörelsen är precis så att pendeln kan nå upp till översta punkten med hastigheten noll så befinner vi oss mitt emellan och den kurvan kallas för separatris.

Uppgift 2

a) Tröghetstensorn ges av

$$\overset{\rightrightarrows}{I} = \int \left[\vec{x} \cdot \vec{x} - \vec{x}\vec{x}\right] \rho(\vec{x}) d^3x$$

där $\vec{x} \cdot \vec{x}$ är en vanlig skalärprodukt och $\vec{x}\vec{x}$ är en dyadprodukt. I ett kartesiskt koordinatsystem ges komponenterna av

$$I_{ij} = \int \left[\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right] \rho(\vec{x}) d^3x. \tag{1}$$

b) I_{xz} ges enligt Ekv. (1) av

$$I_{xz} = -\int xz\rho(\vec{x}) d^3x.$$

Eftersom kroppen är rotationssymmetrisk kring z-axeln gäller att $\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z)$ varför vi kan skriva I_{xz} som

$$I_{xz} = -\left[\int_{x<0} xz\rho(x, y, z) d^3x + \int_{x>0} xz\rho(x, y, z) d^3x\right]$$

Byt nu $(x, y, z) \to (x', y', z') = (-x, -y, z)$ i den första integralen,

$$\begin{aligned} I_{xz} &= -\left[-\int_{x'>0} x'z' \underbrace{\rho(-x', -y', z')}_{\rho(x', y', z')} d^3x' + \int_{x>0} xz\rho(x, y, z) d^3x\right] \\ &= -\left[-\int_{x'>0} x'z'\rho(x', y', z') d^3x' + \int_{x>0} xz\rho(x, y, z) d^3x\right] = 0 \end{aligned}$$

d v s för varje volymselement (x, y, z) finns ett volymselement $(-x, -y, z)$ som bidrar lika mycket till I_{xz} fast med motsatt tecken. $I_{zx} = 0$ p g a att $\vec{\vec{I}}$ är symmetrisk.

Att $I_{yz} = I_{zy} = 0$ visas på samma sätt.

c) Enligt Ekv. (1) har vi

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &\leq \int (z^2 + x^2 + y^2 + z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= \int (z^2 + x^2)\rho(\vec{x})d^3x + \int (y^2 + z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= I_{yy} + I_{xx}, \end{aligned}$$

d v s, $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$, vilket är precis vad som skulle visas.

Likhet gäller då

$$\int z^2 \rho(\vec{x})d^3x = 0,$$

d v s då kroppen saknar utsträckning i z-led, d v s är en tunn plan skiva i xy-planet.

Uppgift 3

a) Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

b) Man kan visa att $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ genererar en kanonisk transformation på två sätt:

   i) man kan först utifrån Hamiltons variationsprincip visa att $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation (och ta fram variabelsambanden) och sedan ta fram $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ som Legendretransformen av Φ (så när som på ett tecken) med avseende på $\underset{\sim}{Q}$ (se Scheck, avsnitt 2.23)

   ii) eller så kan man från Hamiltons variationsprincip direkt visa att $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ kan generera en kanonsisk transformation.

Här nedan visas hur man går till väga enligt ii).

Vi kan visa att transformationen är kanonisk genom att kräva att Hamiltons variationsprincip är uppfylld både i de gamla variablerna,

$$\delta \int \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \right] dt = 0 \tag{2}$$

och i de nya variablerna,

$$\delta \int \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) \right] dt = 0. \tag{3}$$

Detta är säkerställt om integranderna i Ekv. (2) och (3) inte skiljer sig med mer än en total tidsderivata av en funktion $M(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$, d v s om

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) + \frac{dM}{dt}. \tag{4}$$

Välj nu

$$M = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t) - \sum_i Q_i P_i \tag{5}$$

där vi har rätt att lägga till den sista summan eftersom rörelseekvationerna inte ändras om vi lägger till en total tidsderivata av en funtion av de kanoniska variablerna. Derivera nu M med avseende på t,

$$\frac{dM}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t} - \sum_i \dot{Q}_i P_i - \sum_i Q_i \dot{P}_i$$

Om vi sätter in detta uttryck i Ekv. (4) och kräver att faktorerna framför $\dot{q}_i$ och $\dot{P}_i$ ska ta ut varandra (det är för att kunna göra denna identifikation som $\sum_i Q_i P_i$ lades till i Ekv. (5)) får vi variabelsambanden

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \end{cases}$$

För att Ekv. (4) ska gälla måste dessutom följande samband gälla för Hamiltonfunktionerna,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Uppgift 4

Använd utslagen från respektive jämviktsläge, x och y, som generaliserade koordinater. Den kinetiska och potentiella energin ges då av

$$\begin{cases} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ V &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(y-x)^2 + \frac{1}{2}ky^2 = kx^2 + ky^2 - kxy \end{cases}$$

vilket ger Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - kx^2 - ky^2 + kxy$$

Derivatorna av Lagrangianen ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= -2kx + ky \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2ky + kx \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} \end{cases}.$$

Lagranges ekvationer ger nu rörelseekvationerna

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2kx - ky = 0 \\ m\ddot{y} + 2ky - kx = 0 \end{cases} \tag{6}$$

som antingen löses genom att skriva om Ekv. (6) som ett system av 4 st första ordningens ordinära differentialekvationer (se t ex Simmons) eller på följande sätt.

1. Ekv. (6a) + (6b) ger

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) + k(x + y) = 0$$

vilken med $z_1 = x + y$ kan skrivas som

$$\ddot{z}_1 + \frac{k}{m}z_1 = 0$$

med lösningen

$$z_1 = A\cos(\omega_1 t + \beta_1) \quad ; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Ekv. (6a) - (6b) ger

$$m(\ddot{x} - \ddot{y}) + 3k(x - y) = 0$$

vilken med $z_2 = x - y$ kan skrivas som

$$\ddot{z}_2 + \frac{3k}{m} z_2 = 0$$

med lösningen

$$z_2 = B\cos(\omega_2 t + \beta_2) \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

De sökta vinkelfrekvenserna är således

$$\begin{cases} \omega_1 & = & \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 & = & \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

Uppgift 5

Se Scheck, avsnitt 2.31–2.32, samt föreläsningsanteckningarna.