Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-16 46 49

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik

9 juni 1999

Uppgift 1

a) Derivatorna av Lagrangefunktionen ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} - mv \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -mg \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger nu

$$m\ddot{x} = -mg$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{x}(0)t + x(0)$$

b) Om vi antar att Lagrangefunktionen är given på sin naturliga form, $L = T - U$, kan den givna L beskriva en partikel med massa m som faller fritt i ett gravitationsfält med tyngdaccelerationen g. Läget x är givet i ett koordinatsystem som rör sig med konstant hastighet v nedåt (x-axeln är riktad uppåt).

c) Notera att

$$L' = L - \left[\frac{1}{2}mv^2 - mv\dot{x} + mgvt\right]$$

Kalla uttrycket inom hakparenteser för $f(\dot{x}, t)$. Eftersom

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{d}{dt}(-mv) - 0 = 0$$

ger L' upphov till samma rörelseekvationer som L.
Anm. Vi kan alltid till L addera en total tidsderivata av en funktion $M(x, t)$ utan att rörelseekvationerna förändras. I vårt fall har vi $f = dM/dt$, med

$$M = \frac{1}{2}mv^2t - mvx + \frac{1}{2}mgvt^2$$

Uppgift 2

a) Välj θ som vår generaliserade koordinat. Hastigheten ges då av $v = R\dot{\theta}$ och höjden över det nedre jämviktsläget är $z = R(1 - \cos\theta)$. Lagrangefunktionen ges då av

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mgR(1 - \cos\theta)$$

Den kanoniska impulsen ges av

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

och vi kan nu skriva Hamiltonfunktionen som

$$H(\theta, p_\theta) = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{mR^2}{2}\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + mgR(1 - \cos\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + mgR(1 - \cos\theta)$$

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\begin{cases} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & = & \frac{p_\theta}{mR^2 l} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} & = & -mgR\sin\theta \end{cases}$$

För små svängningar kan vi sätta $\sin\theta \simeq \theta$,

$$\begin{cases} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & = & \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} & = & -mgR\theta \end{cases}$$

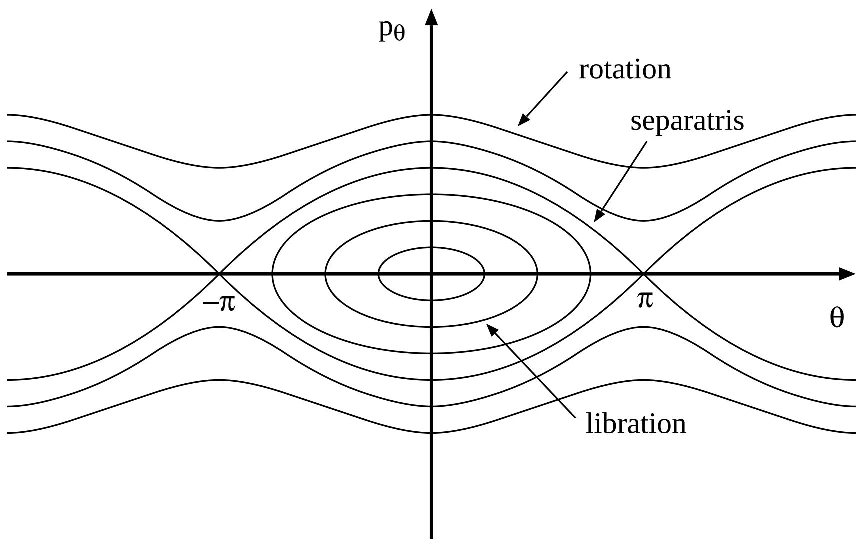
Derivera den andra ekvationen med avseende på tiden och sätt in uttrycket för $\dot{\theta}$ från den första ekvationen så får vi

$$\ddot{p}_\theta = -mgR\dot{\theta} = -\frac{g}{R}p_\theta$$

Denna löses enkelt och vi får lösningen

$$\begin{cases} p_\theta & = & A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\theta + \theta_0\right) \\ \theta & = & \frac{A}{mR\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\theta + \theta_0\right) \end{cases}$$

b) Fasrummet, $\mathbf{P}$, spänns upp av $\{\theta, p_\theta\}$ och för allmänna utslagsvinklar har vi följande fasporträtt:



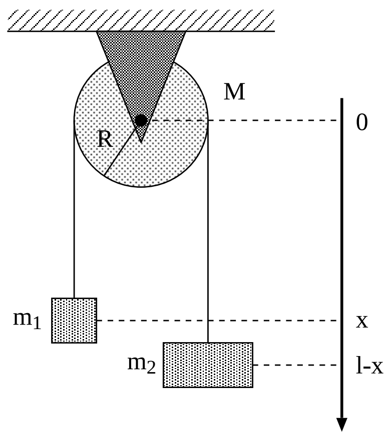
För små utslagsvinklar är lösningskurvorna (nästan) elipser. För så stora utslagsvinklar att pendeln slår över har vi rotation. När rörelsen är precis så att pendeln kan nå upp till översta punkten med hastigheten noll så befinner vi oss mitt emellan och den kurvan kallas för separatris.

Uppgift 3

Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 4

Låt snörets längd vara l och inför koordinater enligt figur. Tröghetsmomentet för cylindern ges av $I = \frac{1}{2}MR^2$ och dess vinkelhastighet är $\omega = \dot{x}/R$. Den kinetiska energin ges då av



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2m_1+2m_2+M)\dot{x}^2 \end{aligned}$$

Den potentiella energin ges av

$$U = -m_1 g x - m_2 g(l-x)$$

Lagrangianen blir då

$$L = T - U = \frac{1}{4}(2m_1+2m_2+M)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g(l-x)$$

Dess derivator blir

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{1}{2}(2m_1+2m_2+M)\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= (m_1-m_2)g \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger nu

$$\ddot{x} = \frac{2(m_1-m_2)}{2m_1+2m_2+M}g$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$x(t) = \frac{m_1-m_2}{2m_1+2m_2+M}gt^2 + \dot{x}(0)t + x(0).$$

Med begynnelsevillkoret $\dot{x}(0) = 0$ får vi lösningen

$$x(t) = \frac{m_1-m_2}{2m_1+2m_2+M}gt^2 + x(0).$$

där $x(0)$ är läget för massa 1 när när systemet släpps.

Uppgift 5

a) Se Scheck, avsnitt 2.35, samt föreläsningsanteckningarna.

b) Se Scheck, avsnitt 2.36, samt föreläsningsanteckningarna.