Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-16 46 49

**Lösningar till**

# Tentamen i Analytisk Mekanik

**28 maj 1999**

## Uppgift 1

a) Notera att

$$\frac{dM(q,t)}{dt} = \frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}$$

Derivatorna av $L'$ ges av

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial M}{\partial q} \\
\frac{\partial L'}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t}
\end{aligned}$$

Om vi kan visa att Lagranges ekvationer är uppfyllda för $L'$ också så är vi klara. Sätt in uttrycken ovan i Lagranges ekvationer för $L'$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right] + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial M}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned}$$

dvs om den urspungliga Lagrangefunktionen $L$ uppfyller Lagranges ekvationer så gör $L'$ det också. Rörelseekvationerna är därför invarianta under transformationen $L \to L'$.

b) För $L' = \alpha L$ får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} &= \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
\frac{\partial L'}{\partial q} &= \alpha \frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned}$$

Sätt in i Lagranges ekvationer för $L'$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right]$$

Om $\alpha \neq 0$ kan vi dividera med $\alpha$ och vi ser då att om $L$ uppfyller Lagranges ekvationer så gör $L'$ det också.

**Uppgift 2**

Med den generaliserade potentialen $U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ ges Lagrangianen av

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2 - e\Phi(\vec{q}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q}, t)$$

Derivatorna av $L$ m a p $\dot{q}_i$ och $q_i$ ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m\dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i(\vec{q}, t) \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= -e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sum_j \frac{e}{c} \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Lagranges ekvationer ger nu

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = m\ddot{q}_i + \frac{e}{c} \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{e}{c} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i},$$

vilket kan skrivas

$$m\ddot{q}_i = e \underbrace{\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}\right]}_{E_i} + \frac{e}{c} \sum_j \left[\dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \dot{q}_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right] \qquad (1)$$

Det återstår nu att visa att summan över $j$ är lika med $i$-komponenten av $\dot{\vec{q}} \times \vec{B}$. Det görs enklast med s k $\varepsilon$-algebra. Med Einsteins summakonvention (lika index summeras över) har vi

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{q}} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{q}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{q}_j (\varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial q_l} A_m) = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} \dot{q}_j \frac{\partial A_m}{\partial q_l} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} \dot{q}_j \frac{\partial A_m}{\partial q_l} - \delta_{im}\delta_{jl} \dot{q}_j \frac{\partial A_m}{\partial q_l} = \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \dot{q}_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

vilket är precis lika med summan över $j$ i Ekv. (1). Vi kan nu alltså skriva Ekv. (1) som

$$m\ddot{q}_i = eE_i + \frac{e}{c} (\dot{\vec{q}} \times \vec{B})_i$$

vilket är precis vad vi skulle visa.
Notera att den kanoniska rörelsemängden ges av

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i(\vec{q}, t)$$

vilket ej är lika med den *kinetiska* rörelsemängden, $m\dot{q}_i$.

**Uppgift 3**
Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

**Uppgift 4**
Vi har en frihetsgrad och kan välja förlängningen $x$ av fjädern $AB$ jämfört med dess naturliga längd som vår generaliserade koordinat.

a) Vid jämvikt, $x = x_0$, gäller att kraften på massan $m$ från gravitationen och fjädern tar ut varandra, dvs att

$$mg = kx_0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$$

b) Den potentiella energin kan skrivas som

$$V(x) = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

Den kinetiska energin ges dels av rörelsen hos massan $m$ och rotationen hos cylindern. Notera att vridningsvinkeln för cylindern ges av $x/R$ och vinkelfrekvensen är därför $\omega = \dot{x}/R$. Tröghetsmomentet med avseende på cylinderns symmetriaxel ges av $I = MR^2/2$ och den kinetiska energin ges därför av

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \frac{MR^2}{2} = \left(\frac{M}{4} + \frac{m}{2}\right)\dot{x}^2.$$

Lagrangianen ges nu av

$$L = \left(\frac{M}{4} + \frac{m}{2}\right)\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

Derivatorna m a p $\dot{x}$ och $x$ ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= mg - kx \end{aligned}$$

Lagranges ekvationer ger nu

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{x} + kx = mg$$

Den homogena ekvationen har lösningen

$$x_h = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M/2+m}}t + \beta\right)$$

och partikulärlösningen ges av

$$x_p = \frac{mg}{k}.$$

Vi har således den allmänna lösningen

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M/2+m}}t + \beta\right) + \frac{mg}{k}.$$

Vårt begynnelsevillkor $\dot{x}(0) = 0$ ger $\beta = 0$ och $x(0) = 0$ ger $A = -\frac{mg}{k}$. Lösningen med våra begynnelsevillkor lyder således

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M/2+m}}t\right)\right]$$

dvs vi har svängningar runt vårt jämviktsläge $x_0$ med amplituden $\frac{mg}{k}$.

**Uppgift 5**

a) Se Scheck, avsnitt 2.35, samt föreläsningsanteckningarna.

b) Vi har Hamiltonfunktionen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

Vi har inget explicit tidsberoende och kan således välja att lösa Hamilton-Jacobis karateristiska ekvation,

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E,$$

vilken för vår Hamiltonfunktion blir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = E$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mE - mkq^2}$$

$$\Rightarrow \qquad S = \int \sqrt{2mE - mkq^2}dq$$

Vi kan nu antingen låta $S^* = S - Et$ eller $S$ generera den kanoniska transformationen. Vilket vi väljer är egalt och vi väljer här det senare.

Vi har en frihet att välja vår nya rörelsemängd $P$ och väljer här $P = \alpha = E$.

$$\Rightarrow \qquad S = \int \sqrt{2mP - mkq^2}dq$$

Variabelsambanden för transformationen lyder nu

$$\begin{cases} p &= \frac{\partial S}{\partial q} &= \sqrt{2mP - mkq^2} \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} &= \int \frac{m}{\sqrt{2mP - mkq^2}}dq = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2P}}q\right) \end{cases}$$

Löser vi ut $q$ och $p$ ur dessa ekvationer får vi

$$\begin{cases} q &= \sqrt{\frac{2P}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}Q\right) \\ p &= \sqrt{2mP} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}Q\right) \end{cases}$$

Hamiltons ekvationer ger nu för $Q$ och $P$ med $\tilde{H} = E = P$,

$$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \\ \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P = \alpha \\ Q = t + \beta \end{cases}$$

vilket ger lösningen till rörelseekvationerna

$$\begin{cases} q(t) &= \sqrt{\frac{2P}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0\right) \\ p(t) &= \sqrt{2mP} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0\right) \end{cases} \quad \text{med} \quad \theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\beta$$