Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

24 augusti 2007

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Välj θ som vår generaliserade koordinat. Hastigheten ges då av $v = R\dot{\theta}$ och höjden över det nedre jämviktsläget är $z = R(1 - \cos\theta)$. Lagrangefunktionen ges då av

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mgR(1 - \cos\theta)$$

Den kanoniska impulsen ges av

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

och vi kan nu skriva Hamiltonfunktionen som

$$H(\theta, p_\theta) = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{mR^2}{2}\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + mgR(1 - \cos\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + mgR(1 - \cos\theta)$$

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} &= \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} &= -mgR\sin\theta \end{cases}$$

För små svängningar kan vi sätta $\sin\theta \simeq \theta$,

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} &= \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} &= -mgR\theta \end{cases}$$

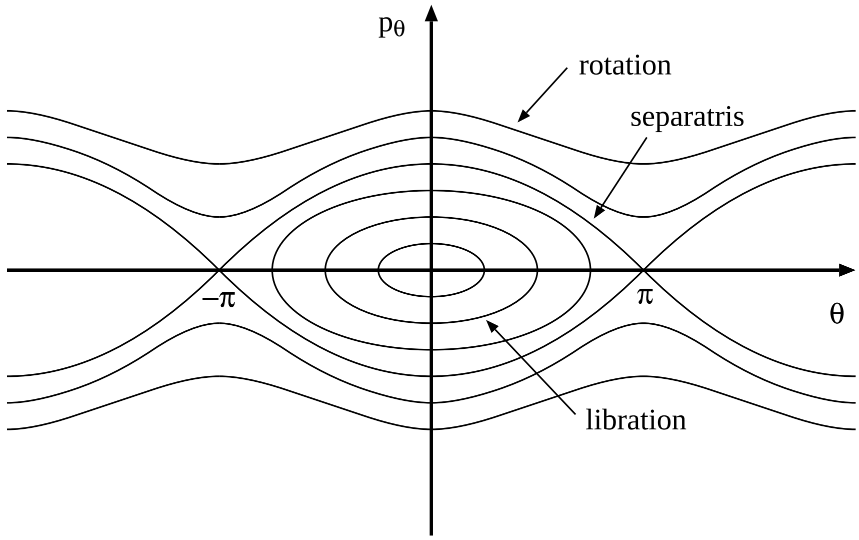
Derivera den andra ekvationen med avseende på tiden och sätt in uttrycket för $\dot{\theta}$ från den första ekvationen så får vi

$$\ddot{p}_\theta = -mgR\dot{\theta} = -\frac{g}{R}p_\theta$$

Denna löses enkelt och vi får lösningen

$$\begin{cases} p_\theta &= A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \theta_0\right) \\ \theta &= \frac{A}{mR\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \theta_0\right) \end{cases}$$

b) Fasrummet, $\mathbf{P}$, spänns upp av $\{\theta, p_\theta\}$ och för allmänna utslagsvinklar har vi följande fasporträtt:



För små utslagsvinklar är lösningskurvorna (nästan) elipser. För så stora utslagsvinklar att pendeln slår över har vi rotation. När rörelsen är precis så att pendeln kan nå upp till översta punkten med hastigheten noll så befinner vi oss mitt emellan och den kurvan kallas för separatris.

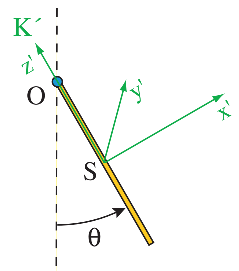
Uppgift 2

Se Goldstein, samt föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 3

a) Den kinetiska energin består av dels en translationsenergi för masscentrum och dels en rotationsenergi för rotationen kring masscentrum,

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{I}\cdot\omega$$



Låt oss beräkna den sista termen, rotationsenergin i ett kroppsfixt system $\bar{K}$ med origo i masscentrum enligt figur. Tröghetstensorn i detta system ges av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi behöver också vinkelhastighetsvektorn ω uttryckt i $\bar{K}$-systemet. Denna får bidrag från två håll, dels rotationen kring vertikalaxeln och dels θ-rotationen,

$$\omega = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\hat{\mathbf{x}}' + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}'\right) - \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}}'$$

Rotationsenergin för rotationen kring masscentrum är således

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{I}\cdot\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{24}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

Den totala kinetiska energin blir då

$$T = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{6}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

b) För att ta fram rörelsen kan vi använda oss av Lagranges ekvationer. Lagrangefunktionen ges av

$$L = T - U = \frac{1}{6}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

De partiella derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, ger detta oss rörelseekvationerna,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Den andra av dessa ekvationer kan vi integrera på en gång och vi får då

$$\sin^2\theta\dot{\varphi} = A = \text{konst.} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{A}{\sin^2\theta}$$

Konstanten A kan vi bestämma från begynnelsevillkoren $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ och $\theta(0) = \pi/2$, vilket ger $A = \omega_0$. Det efterfrågade sambandet $\dot{\varphi}$ som funktion av θ är således

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\sin^2\theta} \tag{2}$$

Vi är också intresserade av vändläget för θ-rörelsen och kan antingen utgå från energins bevarande eller den första av rörelseekvationerna, Ekv. (1). Låt oss utgå från den första rörelseekvationen. Med Ekv. (2) kan denna skrivas

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}ml^2\omega_0^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0$$

Multiplicera denna ekvation med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden så erhåller vi

$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = B = \text{konst.}$$

Integrationskonstanten B kan bestämmas från begynnelsevillkoren $\theta(0) = \pi/2$ och $\dot{\theta}(0) = 0$ vilket ger $B = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$. Vi är nu redo att ta fram vändpunkten för θ-rörelsen och kan konstatera att vändpunkterna definieras av $\dot{\theta} = 0$, vilket insatt i ekvationerna ovan ger

$$\frac{1}{6}ml^2\omega_0^2\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$$

Denna ekvation kan skrivas om som

$$ml\cos\theta\left[l\omega_0^2\cos\theta - 3g + 3g\cos^2\theta\right] = 0$$

Denna ekvation har två lösningar, antingen att $\cos\theta = 0$, vilket ger den övre vändpunkten $\theta = \pi/2$, d.v.s. samma som vårt begynnelsevillkor. Den andra lösningen erhålles då uttrycket inom hakparenteser är noll, d.v.s. då

$$\cos^2\theta + \frac{l\omega_0^2}{3g}\cos\theta - 1 = 0$$

Denna andragradsekvation i $\cos\theta$ löses enkelt och vi får lösningen

$$\cos\theta = -\frac{l\omega_0^2}{6g} \overset{+}{(-)} \sqrt{1+\frac{l^2\omega_0^4}{36g}}$$

där endast lösningen med + framför roten är fysikalisk (eftersom $\cos\theta \in [-1,1]$).

Uppgift 4

a) Hamiltonfunktionen ges av

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$$

och dess tidsderivata är

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{dL}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} \dot{q}_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k}\ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k - \sum_k p_k \ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) = 0
\end{aligned}$$

Hamiltonfunktionen H är därmed bevarad när vi inte har något explicit tidsberoende.

b) Vi har nu att Lagrangefunktionen är given av

$$L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) = T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) - U(\underset{\sim}{q})$$

Hamiltonfunktionen ges nu av

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{p_k}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} - T + U = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - T + U$$

Eftersom U ej beror av $\underset{\sim}{\dot{q}}$ kan vi ersätta $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ med $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ och erhåller då

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - T + U \tag{3}$$

Vi utnyttjar nu ledningen och visar Eulers teorem för vår kinetiska energi. T ges av

$$T = \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} c_{jk}(\underset{\sim}{q})\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Eftersom T på denna form är en homogen funktion av grad 2 i $\underset{\sim}{\dot{q}}$ gäller att

$$T(\underset{\sim}{q}, \lambda\dot{q}_1, \lambda\dot{q}_2, \ldots, \lambda\dot{q}_f) = \lambda^2 T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$$

Derivera med avseende på λ och sätt sedan $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{d\lambda} T(\underset{\sim}{q}, \lambda\dot{q}_1, \lambda\dot{q}_2, \ldots, \lambda\dot{q}_f)\right]_{\lambda=1} &= \left[\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^2 T\right)\right]_{\lambda=1} \\
\left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \lambda\dot{q}_k} \frac{d\lambda\dot{q}_k}{d\lambda}\right]_{\lambda=1} &= [2\lambda T]_{\lambda=1} \\
\left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \lambda\dot{q}_k} \dot{q}_k\right]_{\lambda=1} &= [2\lambda T]_{\lambda=1} \\
\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k &= 2T
\end{aligned}$$

Därmed är Eulers teorem bevisat. Insatt i Ekv. (3) erhåller vi slutligen

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - T + U = 2T - T + U = T + U = E$$

vilket är vad vi skulle visa. Enligt a) är H och i således även E en rörelsekonstant.

Uppgift 5

a) Funktionalen $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ antar ett extremvärde då variationsproblemets Euler-ekvation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

är uppfylld. Vi vill visa att Euler-ekvationen ovan är ekvivalent med

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{5}$$

Denna ekvation kallas ibland för variationsproblemets första integral.

Enklaste sättet att visa att de två uttrycken är ekvivalenta är att ta det andra uttrycket, utföra derivatorna och se att vi då erhåller Euler-ekvationen. Låt oss göra detta. Kom dock ihåg att $f = f(x, y, y')$ så när vi utför den totala derivatan $\frac{d}{dx}$ får vi många inre derivator enligt kedjeregeln. Vi får då

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right) \\
= \quad &-\frac{\partial f}{\partial y}\,y' + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y' \underbrace{\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\right]}_{\substack{= 0 \text{ enligt} \\ \text{Euler-ekvationen}}} = 0
\end{aligned}$$

Ekv (5) följer alltså från Euler-ekvationen, ekv. (4). Vi har då visat ena riktningen av ekvivalensen. Eftersom den triviala lösningen $y' \equiv 0$ ej kan gälla för generella lösningar till variationsproblemet kan vi sluta oss till att Euler-ekvationen följer från ekv. (5). Vi har då visat att de två ekvationerna är ekvivalenta.

b) Enklast är att skriva funktionalen på formen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c} \sqrt{1+y'^2} dx$$

Vår funktion f ges då av

$$f(x,y,y') = f(y,y') = \frac{n(y)}{c} \sqrt{1+y'^2}$$

dvs f beror ej explicit av x. Det är då mycket enklare att använda ekv. (5) istället för Euler-ekvationen för att hitta $y(x)$. Utnyttjar vi att $f = f(y,y')$ i ekv. (5) erhåller vi

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ &\Rightarrow f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Med vårt uttryck för f blir detta

$$\begin{aligned} \text{konst.} &= \frac{n(y)}{c}\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}2y' = \frac{n(y)}{c}\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] \\ &= \frac{n(y)}{c}\left[\frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{n(y)}{c}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad (6) \end{aligned}$$

Eftersom Snells lag är uttryckt med infallsvinklarna skriver vi om detta uttryck med hjälp av dessa. Eftersom $\cot\theta = \frac{dy}{dx}$ kan vi skriva om detta som

$$\text{konst.} = \frac{n(y)}{c}\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} = \frac{n(y)}{c}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} = \frac{n(y)}{c}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}} = \frac{n(y)}{c}\sin\theta$$

Om vi bakar in ljushastigheten c i vår konstant så erhåller vi

$$n(y)\sin\theta = \text{konst.}$$

Detta ska gälla för hela färden[1] och då i synnerhet i gränsen mellan de två olika materialen. Vi erhåller således

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

vilket är Snells lag som skulle visas.

[1] När vi inte är vid gränsen mellan de två materialen är $n(y)$ en konstant och vi får då att θ också är en konstant, dvs vi erhåller att ljuset går rakt då brytningsindex ej ändras.