Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

19 mars 2007

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Tröghetsprodukten I_{xy} ges av

$$I_{xy} = \int\int\int \rho(x,y,z)(-xy)dx\,dy\,dz$$

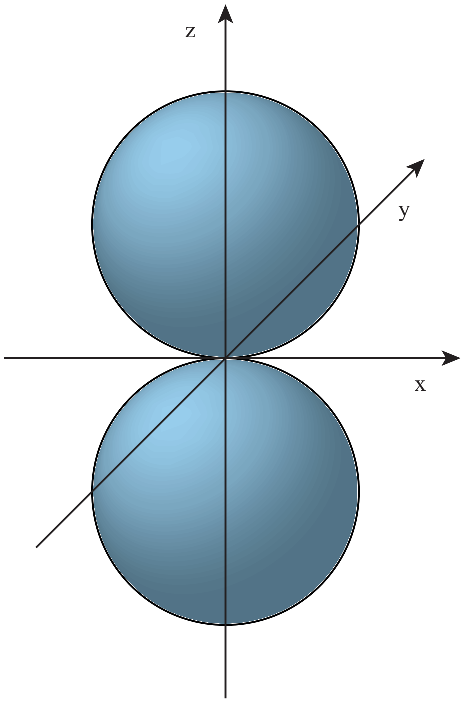
Densiteten ρ är en jämn funktion i x (och y) p.g.a. rotationssymmetrin, medan $-xy$ är en udda funktion i x (och y). Att integrera en udda funktion över ett jämnt intervall ger noll, dvs $I_{xy} = 0$. På samma sätt är alla andra tröghetsprodukter också noll.

b) Tröghetsprodukten I_{xz} ges av

$$I_{xz} = \int\int\int \rho(x,y,z)(-xz)dx\,dy\,dz$$

Spegelsymmetri i xy-planet innebär att $\rho(x,y,z)$ är en jämn funktion i z, medan $-xz$ är en udda funktion. Återigen har vi således en udda funktion som integreras över ett jämnt intervall vilket ger noll, dvs $I_{xz} = 0$. På samma sätt är $I_{yz} = 0$. (Notera att vi inte kan säga något om I_{xy} dock.)

c) Tröghetstensorn för ett homogent klot med massa m och radie r *med avseende på masscentrum* ges av



$$I_{MC} = \frac{2}{5}mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inför nu ett koordinatsystem med z-axeln längs med förbindelselinjen mellan de två klotens masscentrum (ett möjligt bra val av koordinatsystem). Vi vill nu förflytta denna tröghetstensor så att den blir med avseende på det nya masscentrum S istället. Vi använder oss då av Steiners sats. För det övre klotet kan vi skriva att tröghetstensorn med avseende på S blir

$$I_{S,1} = I_{MC} + m(a^2\mathbb{E} - \mathbf{aa})$$

där $\mathbf{a} = (0, 0, r)$ är vektorn från S till masscentrum för det övre klotet och $\mathbb{E}$ är enhetsmatrisen.
Vi får således

$$\begin{aligned} I_{S,1} &= I_{MC} + ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= ma^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

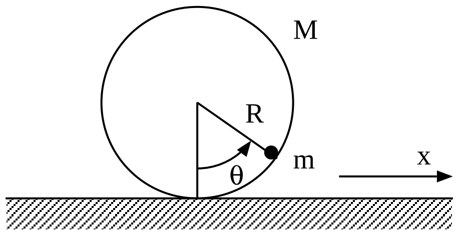
För det andra klotet får vi på samma sätt

$$I_{S,2} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

vilket ger tröghetstensorn med avseende på S,

$$I_S = I_{S,1} + I_{S,2} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Uppgift 2



a) Välj partikelns utslag från lodlinjen, θ, och cylinderns läge x som generaliserade koordinater. Den kinetiska energin för cylindern ges av

$$T_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega I_z \omega$$

vilket med

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} \quad ; \quad I_z = MR^2$$

ger

$$T_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = M\dot{x}^2$$

Den kinetiska energin för massan m ges av

$$T_{\text{p}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}\hat{x} + R\dot{\theta}\hat{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{\theta}}_{\cos\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

Sålunda ges den totala kinetiska energin av

$$T = \frac{1}{2}(2M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta.$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mgR(1-\cos\theta)$$

Vår Lagrangefunktion ges då slutligen av

$$L = T - U = \frac{1}{2}(2M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mgR(1-\cos\theta). \tag{1}$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen ges då av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (2M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\dot{\theta} + mR\dot{x}\cos\theta \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$, får vi då rörelseekvationerna

$$\frac{d}{dt}\Big[(2M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta\Big] = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\Big[mR^2\dot{\theta} + mR\dot{x}\cos\theta\Big] + mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgR\sin\theta = 0 \tag{3}$$

b) Ekv. (2) kan integreras på en gång och vi erhåller

$$(2M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta = A = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{A - mR\dot{\theta}\cos\theta}{2M+m}$$

Vi kan faktiskt integrera denna ekvation på en gång vilket ger

$$x = \frac{At - mR\sin\theta}{2M+m} + B \quad ; \quad B = \text{konstant.}$$

Med begynnelsevillkoren $x(t=0)=0$ och $\theta(t=0)=\pi/2$ ser vi att $C = mR/(2M+m)$. Med $\dot{x}(t=0)=0$ och $\dot{\theta}(t=0)=0$ ser vi att $A=0$. Vår lösning för de givna begynnelsevillkoren är således

$$x(\theta) = \frac{mR}{2M+m}(1-\sin\theta)$$

Uppgift 3

a) Låt oss välja θ_1 och θ_2 som generaliserade koordinater enligt figuren och lös problemet med hjälp av Lagranges ekvationer. Den kinetiska energin för den övre massan är given av

$$T_1 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

För den undre massan kan vi sätta upp ortsvektorn från den fixa upphängningspunkten som

$$\mathbf{r}_2 = (l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2)\hat{\mathbf{x}} - (l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\hat{\mathbf{y}}$$

där $\hat{\mathbf{x}}$ ligger i horisontalplanet och $\hat{\mathbf{y}}$ i vertikalplanet. Detta ger oss hastighetsvektorn

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = l(\cos\theta_1\dot{\theta}_1 + \cos\theta_2\dot{\theta}_2)\hat{\mathbf{x}} + l(\sin\theta_1\dot{\theta}_1 + \sin\theta_2\dot{\theta}_2)\hat{\mathbf{y}}$$

Hastigheten i kvadrat för den undre massan är således

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = l^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\big(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\cos(\theta_1-\theta_2)}\big)\right]$$

Detta ger oss den totala kinetiska energin

$$T = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

b) Potentialen ges av

$$U = -mgl\cos\theta_1 - mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Lagrangefunktionen ges då slutligen av

$$L = T - U = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

De partiella derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl\sin\theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= 2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl\sin\theta_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, ger detta oss rörelseekvationerna,

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + ml^2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) + 2mgl\sin\theta_1 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - ml^2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + mgl\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Antag nu att vi har små utslagsvinklar. Vi kan då Taylorutveckla rörelseekvationerna och bara behålla termer linjära i vinklar och tidsderivator av dessa. Vi får då

$$\begin{cases} ml^2\left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + 2mgl\theta_1 = 0 \\ ml^2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + mgl\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Ansätt nu att lösningarna är på formen

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

och sätt in detta i våra lineariserade rörelseekvationer (5). Detta ger oss följande ekvation för koefficienterna A_1 och A_2

$$\begin{pmatrix} 2m(gl - l^2\omega^2) & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & m(gl - l^2\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

För att denna ekvation ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten för koefficientmatrisen vara noll, d.v.s.

$$2m^2(gl - l^2\omega^2)^2 - m^2l^4\omega^4 = 0$$

Detta är en andragradsekvation för ω^2, med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$$

Våra sökta vinkelfrekvenser är således

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}$$

Uppgift 4

a) Notera att

$$\frac{d}{dt}M(\underset{\sim}{q}, t) = \sum_j \frac{\partial M}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial M}{\partial t}$$

Derivatorna av L' ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_j \frac{\partial M}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial M}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_j \frac{\partial M}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 M}{\partial q_i q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial t} \end{aligned}$$

Om vi kan visa att Lagranges ekvationer är uppfyllda för L' också så är vi klara. Sätt in uttrycken ovan i Lagranges ekvationer för L'

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 M}{\partial q_i q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial t} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial M}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 M}{\partial q_i q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial t} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

dvs om den ursprungliga Lagrangefunktionen L uppfyller Lagranges ekvationer så gör L' det också. Rörelseekvationerna är därför invarianta under transformationen $L \to L'$.

b) Hamiltonfunktionen ges av

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$$

och dess tidsderivata är

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{dL}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} \dot{q}_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k}\ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k - \sum_k p_k \ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) = 0
\end{aligned}$$

Hamiltonfunktionen H är därmed bevarad när vi inte har något explicit tidsberoende.

Uppgift 5

a) Eftersom vi i b)-uppgiften vill lösa rörelseekvationerna för vårt nya transformerade system vill vi helst välja en transformation så att dessa blir så lätta som möjligt att lösa. Vi kan då använda Hamilton-Jacobis ekvation för att hitta en genererande funktion $S(q, P, t)$ som genererar den kanoniska transformationen. Eftersom Hamiltonianen inte beror explicit av tiden kan vi ansätta

$$S(q, P, t) = W(q, P) - E(P)t$$

vilket ger oss Hamilton-Jacobis karakteristiska ekvation

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + mgq = E(P)$$

Vi kan antingen använda oss av S eller W för att generera transformationen. Den enda skillnaden är att den nya Hamiltonianen $K = 0$ om S används och $K = E(P)$ om W används. Vi kommer här att använda W för att generera transformationen. Välj nu $E = P = \alpha$ där vi vet att $P = \alpha =$ konstant eftersom den nya Hamiltonianen bara beror av de nya kanniska rörelsemängderna P (per konstruktion). Vi får då att W ges av

$$W(q,P) = \pm \int \sqrt{2mP - 2m^2gq}dq$$

Våra variabelsamband för en kanonisk transformation av typ B ger oss nu

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\partial W}{q} = \pm\sqrt{2mP - 2m^2gq} &\quad (6)\\
Q &= \frac{\partial W}{P} = \pm \int \frac{1}{2}2m\frac{dq}{\sqrt{2mP - 2m^2gq}} = \pm m2\sqrt{2mP - 2m^2gq}\frac{1}{2m^2g} &\\
&= \pm\frac{1}{mg}\sqrt{2mP - 2m^2gq} &\quad (7)
\end{aligned}$$

Ur ekv. (7) kan vi lösa ut q som funktion av Q och P, vilket insatt i ekv. (6) ger p som funktion av Q och P. Vi får då

$$\begin{aligned}
q &= \frac{P}{mg} - \frac{Q^2g}{2} &\quad (8)\\
p &= mgQ &\quad (9)
\end{aligned}$$

b) Den genererande funktionen $W(q,P)$ ger den nya Hamiltonianen

$$K = H = E(P) = P = \alpha$$

Hamiltons ekvationer ger oss nu

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial K}{P} = 1\\
\dot{P} &= -\frac{\partial K}{Q} = 0
\end{aligned}$$

med lösningen

$$\begin{aligned}
Q &= t + \beta \qquad ; \qquad \beta = \text{ konst.}\\
P &= \alpha = \text{ konst.}
\end{aligned}$$

Insatt i ekv. (8)–(9) ger detta oss lösningen

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\alpha}{mg} - \frac{(\beta+t)^2g}{2}\\
p &= mg(\beta + t)
\end{aligned}$$

där (α, β) får bestämmas från begynnelsevillkoren, vilket ger den rörelse vi förväntar oss för fritt fall.