Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

25 augusti 2006

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Se Goldstein.

b) Tröghetstensorn ges av

$$\vec{\vec{I}} = \int \left[\vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\vec{x}\right]\rho(\vec{x})d^3x$$

där $\vec{x}\cdot\vec{x}$ är en vanlig skalärprodukt och $\vec{x}\vec{x}$ är en dyadprodukt. I ett kartesiskt koordinatsystem ges komponenterna av

$$I_{ij} = \int \left[\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j\right]\rho(\vec{x})d^3x. \tag{1}$$

Enligt Ekv. (1) har vi

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int (x^2+y^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &\leq \int (z^2+x^2+y^2+z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= \int (z^2+x^2)\rho(\vec{x})d^3x + \int (y^2+z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= I_{yy} + I_{xx}, \end{aligned}$$

d v s, $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$, vilket är precis vad som skulle visas.
Likhet gäller då

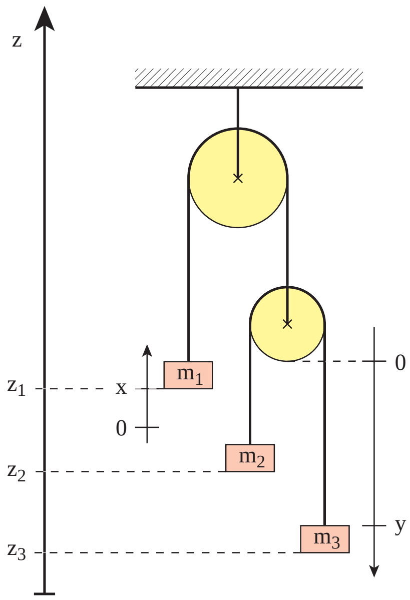
$$\int z^2\rho(\vec{x})d^3x = 0,$$

d v s då kroppen saknar utsträckning i z-led, d v s är en tunn plan skiva i xy-planet.

Uppgift 2

Vi inser att problemet har två frihetsgrader och vi väljer x och y som generaliserade koordinater enligt figur. x är massa 1s läge i förhållande till ursprungsläget. y är massa 3s läge i förhållande till den högra trissan. Detta innebär att vi kan skriva ändringen av höjden för de tre massorna som

$$\begin{cases} z_1 &= x \\ z_2 &= y - x \\ z_3 &= -y - x \end{cases} \tag{2}$$



Detta ger den kinetiska energin

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{z}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}-\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x}-\dot{y})^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{y}^2 + (m_3-m_2)\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

Den potentiella energin ges av

$$U = m_1gz_1 + m_2gz_2 + m_3gz_3 = (m_1 - m_2 - m_3)gx + (m_2 - m_3)gy$$

vilket ger oss Lagrangianen, $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{y}^2 + (m_3-m_2)\dot{x}\dot{y} - (m_1-m_2-m_3)gx - (m_2-m_3)gy \tag{3}$$

Derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= -(m_1-m_2-m_3)g \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -(m_2-m_3)g \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1+m_2+m_3)\dot{x} + (m_3-m_2)\dot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (m_2+m_3)\dot{y} + (m_3-m_2)\dot{x} \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger oss då rörelseekvationerna

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + (m_3-m_2)\ddot{y} + (m_1-m_2-m_3)g = 0 \tag{4}$$

$$(m_2+m_3)\ddot{y} + (m_3-m_2)\ddot{x} + (m_2-m_3)g = 0 \tag{5}$$

Genom substitution kan vi lösa ut $\ddot{x}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5). Vi erhåller då

$$[m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3)]\,\ddot{y} + 2m_1(m_2-m_3)g = 0$$

På samma sätt kan vi lösa ut $\ddot{y}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5) för att erhålla

$$[m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3]\,\ddot{x} + [m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3]\,g = 0$$

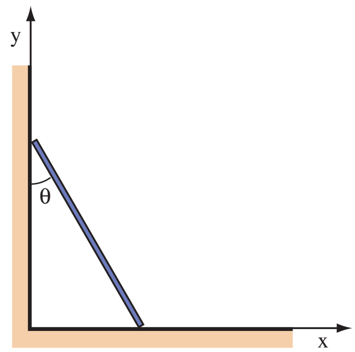
Båda dessa ekvationer integreras enkelt två gånger för att ge lösningen

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{[m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3]\,g}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + At + B \\ y(t) &= -\frac{2m_1(m_2-m_3)g}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + Ct + D \end{aligned}$$

där A, B, C och D är konstanter vilka bestäms av begynnelsevillkoren. Insatt i Ekv. (2) ger dessa ekvationer oss rörelsen för de tre massorna.

Uppgift 3

a) Problemet har en frihetsgrad och vi väljer vinkeln θ mellan stegen och väggen som generaliserad koordinat. Inför också kartesiska koordinater x och y för stegens masscentrum. Följande relation mellan θ och våra kartesiska koordinater gäller:



$$\begin{cases} x &= \frac{l}{2}\sin\theta \\ y &= \frac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} &= -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

Vi kan då skriva upp den kinetiska energin för stegen som

$$T = T_S + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\underbrace{I_z}_{\frac{ml^2}{12}}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

vilket ger oss vår Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{2}\cos\theta$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen blir

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{mgl}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, ger oss nu rörelseekvationerna,

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \tag{6}$$

b) Stegen förlorar kontakten med väggen då accelerationen i x-led är noll ty då är kraften från väggen noll enligt Newtons andra lag. Accelerationen i x-led ges av

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta}$$

Från rörelseekvationerna, Ekv. (6) känner vi $\ddot{\theta}$ som funktion av θ, men vi behöver också $\dot{\theta}^2$ som funktion av θ. Detta kan vi antingen få genom att sätta upp den totala energin och konstatera att den är bevarad, men vi kan också få $\dot{\theta}^2$ från rörelseekvationerna, Ekv. (6), genom att multiplicera dessa med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden,

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{mgl}{2}\sin\theta\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2}\cos\theta = A$$

där konstanten A bestäms från begynnelsevillkoren $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \alpha$, vilket ger $A = \frac{mgl}{2}\cos\alpha$. Vi kan då skriva vårt uttryck för $\ddot{x}$ som

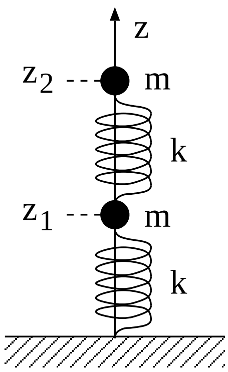
$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\left[\frac{3g}{l}\cos\alpha - \frac{3g}{l}\cos\theta\right] + \frac{l}{2}\cos\theta\left[\frac{3g}{2l}\sin\theta\right] = \left[\frac{9}{4}\cos\theta - \frac{3}{2}\cos\alpha\right]g\sin\theta$$

vilket är noll då

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)$$

d v s detta är den vinkel vid vilken stegen förlorar kontakten med väggen.

Uppgift 4



Systemet har två frihetsgrader och vi inför de generaliserade koordinaterna z_1 och z_2 för de två massornas lägen (se figur). Detta problem kan lösas på flera sätt och vi väljer här att ta fram rörelseekvationerna med hjälp av Lagranges ekvationer och sätta in en ansats till lösning (med hjälp av ledningen) för att lösa ut de möjliga vinkelfrekvenserna.
Den kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2$$

och den potentiella energin är

$$U = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2.$$

Lagrangefunktionen ges då av

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2 - mgz_1 - mgz_2 - \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 - \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2$$

och dess derivator är

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial z_1} & = & -mg - k(z_1 - a) + k(z_2 - z_1 - a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} & = & m\dot{z}_1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial z_2} & = & -mg - k(z_2 - z_1 - a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} & = & m\dot{z}_2 \end{array}\right. .$$

Detta insatt i Lagranges ekvationer ger

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2k}{m}z_1 + \frac{k}{m}z_2 - g \tag{7}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2 - g + \frac{ka}{m}. \tag{8}$$

Detta system av andra ordningens differentialekvationer kan lösas på flera sätt. Ett sätt är att betrakta ekv. (7)+B(8) och bestämma B så att vi får *en* andra ordningens differentialekvation för $z_1 + B \cdot z_2$ som sedan enkelt löses och ger de sökta vinkelfrekvenserna[1]. Ett annat sätt är att enligt ledningen ansätta att lösningen till den homogena ekvationen,

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2k}{m}z_1 + \frac{k}{m}z_2 \tag{9}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2, \tag{10}$$

[1] Vi får två möjliga val av B som vardera ger en av de sökta vinkelfrekvenserna.

är given på formen

$$\begin{cases} z_1 &= A\cos(\omega t+\delta) \\ z_2 &= B\cos(\omega t+\delta) \end{cases} \tag{11}$$

Denna ansats insatt i ekv. (9)-(10), ger

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)A-\frac{k}{m}B\right]=0 \\ \left[-\frac{k}{m}A+\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)B\right]=0 \end{cases}.$$

För att detta ekvationssystem för A och B ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten för koefficientmatrisen vara noll, d v s

$$\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)-\frac{k^2}{m^2}=0.$$

Löser vi ut ω ur denna ekvation erhåller vi de sökta vinkelfrekvenserna[2]

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{2m}\left(3\pm\sqrt{5}\right)}$$

Uppgift 5

a) Hamiltonfunktionen för detta system är

$$H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy$$

Insatt i Hamilton-Jacobis ekvation erhåller vi då följande ekvation för vår sökta verkansfunktion S:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+mgy+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{12}$$

Ansätt nu att S är separabel, d.v.s. att

$$S(x,y,\underset{\sim}{\alpha},t)=S_1(x,\underset{\sim}{\alpha})+S_2(y,\underset{\sim}{\alpha})-Et$$

där vi kan välja vår separationskonstant $E=\alpha_1$ där α_1 är ett av våra två nya konstanta rörelsemängder $\underset{\sim}{P}$. Insatt i Ekv. (12) får vi då

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2}_{\frac{1}{2m}\alpha_2^2}+\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2+mgy}_{\alpha_1-\frac{1}{2m}\alpha_2^2}=\alpha_1$$

Eftersom den första termen bara beror av x och den andra bara av y måste de vara konstanter och vi väljer den första till $\alpha_2^2/2m$. Den andra termen måste då vara $\alpha_1-\alpha_2^2/2m$ för att ekvationen ska vara uppfylld. Vi får då följande ekvationer för S_1 och S_2

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2=\alpha_2^2 \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2+mgy=\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{2m} \end{cases}$$

[2] Om vi skulle vara intresserade av de fullständiga lösningarna sätter vi in våra två ω i ekv. (9) eller (10) för att erhålla ett samband mellan A och B. På så vis får vi en lösning för varje ω och en linjärkombination av dessa två lösningar tillsammans med partikulärlösningen utgör sedan den fullständiga lösningen.

Dessa ekvationer integreras enkelt till

$$\begin{cases} S_1 &= \alpha_2 x + \text{konst.} \\ S_2 &= -\frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y\right)^{\frac{3}{2}} + \text{konst.} \end{cases}$$

vilket ger oss den sökta verkansfunktionen

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x - \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y\right)^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 t \tag{13}$$

där den godtyckliga additiva konstanten har satts till noll.

b) Med den genererande funktionen S i Ekv. (13) kan vi generera en kanonisk transformation till nya variabler $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}\}$ med den nya Hamiltonfunktionen $\tilde{H} = 0$. Från variabelsambanden för denna typ av genererande funktion erhåller vi

$$\begin{cases} Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y} - t \\ Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = x + \frac{\alpha_2}{m^2 g}\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 g y} \end{cases}$$

Ur dessa kan vi lösa ut x och y som funktioner av Q_1 och Q_2 (samt $\underset{\sim}{\alpha}$):

$$x = Q_2 + \frac{\alpha_2}{m}(t + Q_1) \tag{14}$$

$$y = \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{\alpha_2^2}{2m^2 g} - \frac{g}{2}(t + Q_1)^2 \tag{15}$$

Eftersom $\tilde{H} = 0$ vet vi från Hamiltons kanoniska ekvationer i de nya variablerna att både $\underset{\sim}{Q}$ och $\underset{\sim}{P}$ är konstanter. Dessa får vi bestämma från våra begynnelsevillkor: $\dot{x}(0) = v_0$ ger i Ekv. (14) att $\alpha_2 = v_0$, $\dot{y}(0) = 0$ ger i Ekv. (15) att $Q_1 = 0$, $x(0) = 0$ ger i Ekv. (14) att $Q_2 = 0$ samt slutligen $y(0) = h$ ger i Ekv. (15) att $\frac{\alpha_1}{mg} - \frac{v_0^2}{2g} = h$. Vår lösning är således

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

vilket är precis vad vi skulle få med Newtons andra lag för detta enkla problem.