Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

20 mars 2006

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

Problemet har en frihetsgrad och vi kan t.ex. välja avståndet r från O som vår generaliserade koordinat. Den kinetiska energin ges då av

$$T = \frac{1}{2} m \left(r^2 \omega_0^2 + \dot{r}^2 \right)$$

vilket ger Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(r^2 \omega_0^2 + \dot{r}^2 \right)$$

eftersom vi inte har någon potentiell energi. De partiella derviatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} & = & m r \omega_0^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} & = & m \dot{r} \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer ger detta

$$m\ddot{r} = m r \omega_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{r} - \omega_0^2 r = 0 \tag{1}$$

Denna löses med ansatsen

$$r(t) = A e^{\omega t} \tag{2}$$

där A och ω är konstanter. Insatt i ekv. (1) får vi

$$A\omega^2 e^{\omega t} - \omega_0^2 A e^{\omega t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \omega_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm \omega_0$$

Vår allmänna lösning är då en superposition av dessa lösningen (och ingen partikulärlösning då ekv. (1) är homogen). Den allmänna lösningen är således

$$r(t) = A_1 e^{\omega_0 t} + A_2 e^{-\omega_0 t}$$

Begynnelsevillkoret $r(0) = a$ ger att

$$A_1 + A_2 = a$$

Begynnelsevillkoret $\dot{r}(0) = 0$ ger

$$A_1 \omega_0 - A_2 \omega_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = A_2$$

vilket tillsammans ger

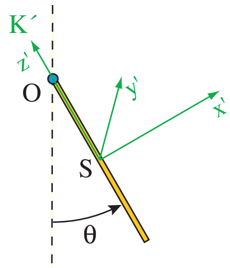
$$A_1 = \frac{a}{2} \qquad ; \qquad A_2 = \frac{a}{2}$$

vilket ger oss lösningen

$$r(t) = \frac{a}{2}\left(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}\right)$$

Uppgift 2

a) Den kinetiska energin består av dels en translationsenergi för masscentrum och dels en rotationsenergi för rotationen kring masscentrum,



$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{I}\cdot\omega$$

Låt oss beräkna den sista termen, rotationsenergin i ett kroppsfixt system K' med origo i masscentrum enligt figur. Tröghetstensorn i detta system ges av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi behöver också vinkelhastighetsvektorn ω uttryckt i $\bar{K}$-systemet. Denna får bidrag från två håll, dels rotationen kring vertikalaxeln och dels θ-rotationen,

$$\omega = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\hat{\mathbf{x}}' + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}'\right) - \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}}'$$

Rotationsenergin för rotationen kring masscentrum är således

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{I}\cdot\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{24}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

Den totala kinetiska energin blir då

$$T = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{6}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

b) För att ta fram rörelsen kan vi använda oss av Lagranges ekvationer. Lagrangefunktionen ges av

$$L = T - U = \frac{1}{6}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

De partiella derivatorna av L ges av

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial L}{\partial\theta} & = & \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} & = & \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} \end{array}\right. \qquad ; \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial L}{\partial\varphi} & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} & = & \frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \end{array}\right.$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, ger detta oss rörelseekvationerna,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Den andra av dessa ekvationer kan vi integrera på en gång och vi får då

$$\sin^2\theta\dot{\varphi} = A = \text{konst.} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{A}{\sin^2\theta}$$

Konstanten A kan vi bestämma från begynnelsevillkoren $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ och $\theta(0) = \pi/2$, vilket ger $A = \omega_0$. Det efterfrågade sambandet $\dot{\varphi}$ som funktion av θ är således

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\sin^2\theta} \tag{4}$$

Vi är också intresserade av vändläget för θ-rörelsen och kan antingen utgå från energins bevarande eller den första av rörelseekvationerna, Ekv. (3). Låt oss utgå från den första rörelseekvationen. Med Ekv. (4) kan denna skrivas

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}ml^2\omega_0^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0$$

Multiplicera denna ekvation med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden så erhåller vi

$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = B = \text{konst.}$$

Integrationskonstanten B kan bestämmas från begynnelsevillkoren $\theta(0) = \pi/2$ och $\dot{\theta}(0) = 0$ vilket ger $B = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$. Vi är nu redo att ta fram vändpunkten för θ-rörelsen och kan konstatera att vändpunkterna definieras av $\dot{\theta} = 0$, vilket insatt i ekvationerna ovan ger

$$\frac{1}{6}ml^2\omega_0^2\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$$

Denna ekvation kan skrivas om som

$$ml\cos\theta\left[l\omega_0^2\cos\theta - 3g + 3g\cos^2\theta\right] = 0$$

Denna ekvation har två lösningar, antingen att $\cos\theta = 0$, vilket ger den övre vändpunkten $\theta = \pi/2$, d.v.s. samma som vårt begynnelsevillkor. Den andra lösningen erhålles då uttrycket inom hakparenteser är noll, d.v.s. då

$$\cos^2\theta + \frac{l\omega_0^2}{3g}\cos\theta - 1 = 0$$

Denna andragradsekvation i $\cos\theta$ löses enkelt och vi får lösningen

$$\cos\theta = -\frac{l\omega_0^2}{6g} \overset{+}{\underset{(-)}{}} \sqrt{1 + \frac{l^2\omega_0^4}{36g}}$$

där endast lösningen med + framför roten är fysikalisk (eftersom $\cos\theta \in [-1, 1]$).

Uppgift 3

a) Med laddningsflödena enligt figur blir den kinetiska och potentiella energin

$$T = \frac{1}{2}L\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{1}{2}L'\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 \quad ; \quad U = \frac{1}{2}\frac{q_1^2 + q_2^2}{C}$$

vilket ger Lagrangefunktionen (här skriven som $\mathcal{L}$ för att undvika sammanblandning med induktansen L)

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}L\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{1}{2}L'\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - \frac{1}{2C}\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= L\dot{q}_1 + L'(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= L\dot{q}_2 + L'(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= -\frac{1}{C}q_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= -\frac{1}{C}q_2 \end{cases}$$

Detta insatt i Lagranges ekvationer ger oss rörelseekvationerna

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + L'(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{1}{C}q_1 = 0 \\ L\ddot{q}_2 + L'(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{1}{C}q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (L + L')\ddot{q}_1 + L'\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_1 = 0 \\ L'\ddot{q}_1 + (L + L')\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

b) Vi antar att lösningarna kommer att vara oscillerande och ges då på formen

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

där a_1 och a_2 är konstanter och ω är våra sökta vinkelfrekvenser. Insatt i Ekv. (5) ger detta

$$\begin{cases} -a_1(L + L')\omega^2 - L'a_2\omega^2 + \frac{1}{C}a_1 = 0 \\ -a_1L'\omega^2 - (L + L')a_2\omega^2 + \frac{1}{C}a_2 = 0 \end{cases}$$

Skrivet på matrisform får vi

$$\begin{pmatrix} (L + L')\omega^2 - \frac{1}{C} & L'\omega^2 \\ L'\omega^2 & (L + L')\omega^2 - \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

vilket har en icke-trivial lösning om determinanten för koefficientmatrisen är noll, dvs om

$$0 = \begin{vmatrix} (L + L')\omega^2 - \frac{1}{C} & L'\omega^2 \\ L'\omega^2 & (L + L')\omega^2 - \frac{1}{C} \end{vmatrix} = \left[(L + L')\omega^2 - \frac{1}{C}\right]^2 - L'^2\omega^4$$

vilket ger oss

$$\omega^2(L + L') - \frac{1}{C} = \pm L'\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2\left[(L + L') \mp L'\right] = \frac{1}{C}$$

vilket ger oss lösningarna

$$\begin{cases} \omega^2 &= \frac{1}{CL} \\ \omega^2 &= \frac{1}{C(2L' + L)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega &= \pm\sqrt{\frac{1}{CL}} \\ \omega &= \pm\sqrt{\frac{1}{C(2L' + L)}} \end{cases}$$

vilket är våra sökta vinkelfrekvenser.

Uppgift 4

a) Se Goldstein, avsnitt 2.2 eller föreläsningsanteckningarna.

b) Detta löses enkelt med variationskalkyl. Avståndet mellan (x_0, y_0) och (x_1, y_1) ges av

$$L = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Vi kan använda oss av Eulers ekvation given i 4a med

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

Insatt i Eulers ekvation ger detta

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) - 0 = 0$$

vilken enkelt integreras till

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = A = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad y' = B = \text{konst.}$$

Integration en gång till ger

$$y = Bx + C$$

vilket är den räta linjens ekvation. Konstanterna B och C ges av villkoret att linjen ska gå igenom (x_0, y_0) och (x_1, y_1).

Uppgift 5

a) Eftersom vi i b)-uppgiften vill lösa rörelseekvationerna för vårt nya transformerade system vill vi helst välja en transformation så att dessa blir så lätta som möjligt att lösa. Vi kan då använda Hamilton-Jacobis ekvation för att hitta en genererande funktion $S(q, P, t)$ som genererar den kanoniska transformationen. Eftersom Hamiltonianen inte beror explicit av tiden kan vi ansätta

$$S(q, P, t) = W(q, P) - E(P)t$$

vilket ger oss Hamilton-Jacobis karakteristiska ekvation

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = E(P)$$

Vi kan antingen använda oss av S eller W för att generera transformationen. Den enda skillnaden är att den nya Hamiltonianen $K = 0$ om S används och $K = E(P)$ om W används. Vi kommer här att använda W för att generera transformationen. Välj nu $E = P = \alpha$ där vi vet att $P = \alpha =$ konstant eftersom den nya Hamiltonianen bara beror av de nya kanniska rörelsemängderna P (per konstruktion). Vi får då att W ges av

$$W(q, P) = \pm\sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2P}{k} - q^2} dq$$

Våra variabelsamband för en kanonisk transformation av typ B ger oss nu

$$p = \frac{\partial W}{q} = \pm\sqrt{mk}\sqrt{\frac{2P}{k} - q^2} \tag{6}$$

$$Q = \frac{\partial W}{P} = \sqrt{mk}\frac{2}{k}\frac{1}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2P}{k} - q^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{2P}{k}}}\right) \tag{7}$$

Ur ekv. (7) kan vi lösa ut q som funktion av Q och P, vilket insatt i ekv. (6) ger p som funktion av Q och P. Vi får då

$$q = \sqrt{\frac{2P}{k}} \sin(\omega Q) \tag{8}$$

$$p = \sqrt{2Pm} \cos(\omega Q) \tag{9}$$

med $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) Den genererande funktionen $W(q, P)$ ger den nya Hamiltonianen

$$K = H = E(P) = P = \alpha$$

Hamiltons ekvationer ger oss nu

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{P} = 1 \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{Q} = 0 \end{aligned}$$

med lösningen

$$\begin{aligned} Q &= t + \beta' \quad ; \quad \beta' = \text{ konst.} \\ P &= \alpha = \text{ konst.} \end{aligned}$$

Insatt i ekv. (8)–(9) ger detta oss lösningen

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin(\omega t + \beta) \quad ; \quad \beta = \omega\beta' \\ p(t) &= \sqrt{2\alpha m} \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

där (α, β) får bestämmas från begynnelsevillkoren.