Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

26 augusti 2005

Lösningar finns även tillgängliga på
`http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html`.

Uppgift 1

Vi kan börja med att betrakta tröghetsprodukterna. I_{xy} är given av

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= -\int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 \frac{y+2R}{2R} xy \\
&= -\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx x \left[\frac{y^3}{6R} + \frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \\
&= -\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \underbrace{x \left(\frac{(R^2-x^2)^{3/2}}{3R} + (R^2-x^2)\right)}_{\text{udda funktion av } x} = 0
\end{aligned}$$

där integralen i sista ledet är noll eftersom x-integralen är av en udda funktion över ett jämnt intervall.
Tröghetsprodukten I_{xz} ges av

$$I_{xz} = -\int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 \frac{y+2R}{2R} xz = 0$$

där vi kan konstatera att denna är noll då z-integralen är av en udda funktion över ett jämnt intervall. På samma sätt är $I_{zy} = 0$. Alla tröghetsprodukter är därmed noll.
Tröghetsmomenten ges av

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int\int\int dx\, dy\, dz\, \rho_0 \frac{y+2R}{2R} \left(y^2+z^2\right) \\
I_{yy} &= \int\int\int dx\, dy\, dz\, \rho_0 \frac{y+2R}{2R} \left(x^2+z^2\right) \\
I_{zz} &= \int\int\int dx\, dy\, dz\, \rho_0 \frac{y+2R}{2R} \left(x^2+y^2\right)
\end{aligned}$$

För att slippa räkna ut samma integraler mer än en gång, låt oss definiera följande integraler

$$\begin{aligned}
I_{x^2} &= \int\int\int dx\,dy\,dz\,\rho_0 \frac{y+2R}{2R} x^2 \\
I_{y^2} &= \int\int\int dx\,dy\,dz\,\rho_0 \frac{y+2R}{2R} y^2 \\
I_{z^2} &= \int\int\int dx\,dy\,dz\,\rho_0 \frac{y+2R}{2R} z^2
\end{aligned}$$

så att

$$I_{xx} = I_{y^2} + I_{z^2} \quad ; \quad I_{yy} = I_{x^2} + I_{z^2} \quad ; \quad I_{zz} = I_{x^2} + I_{y^2}$$

Ingegralen I_{x^2} ges av

$$\begin{aligned}
I_{x^2} &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 \frac{y+2R}{2R} x^2 \\
&= \left\{ yx^2 \text{ är udda i y och integreras över ett jämnt intervall, } \to 0 \right\} \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 x^2 = \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx x^2 2\sqrt{R^2-x^2} \\
&= \{\text{ledningen}\} = 2\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\pi R^4}{8} = \rho_0 \frac{\pi R^4 L}{4}
\end{aligned}$$

Ingegralen I_{y^2} ges av

$$\begin{aligned}
I_{y^2} &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 \frac{y+2R}{2R} y^2 \\
&= \left\{ y^3 \text{ är udda i y och integreras över ett jämnt intervall, } \to 0 \right\} \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 y^2 = \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \frac{2\left(R^2-x^2\right)^{3/2}}{3} \\
&= \{\text{ledningen}\} = \frac{2\rho_0}{3} \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{3\pi R^4}{8} = \rho_0 \frac{\pi R^4 L}{4}
\end{aligned}$$

Slutligen så ges då I_{z^2} av

$$\begin{aligned}
I_{y^2} &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 \frac{y+2R}{2R} z^2 \\
&= \left\{ yz^2 \text{ är udda i y och integreras över ett jämnt intervall, } \to 0 \right\} \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho_0 z^2 = \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-R}^{R} dx z^2 2\sqrt{R^2-x^2} \\
&= \{\text{ledningen}\} = 2\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz z^2 \frac{\pi R^2}{2} = \rho_0 \pi R^2 \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \rho_0 \pi R^2 \frac{L^3}{12} = \rho_0 \frac{\pi R^2 L^3}{12}
\end{aligned}$$

Sätter vi ihop dessa resultat så får vi då slutligen vår sökta tröghetstensor

$$\mathbf{I} = \rho_0 \pi \begin{pmatrix} \frac{R^4 L}{4} + \frac{R^2 L^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^4 L}{4} + \frac{R^2 L^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^4 L}{2} \end{pmatrix}$$

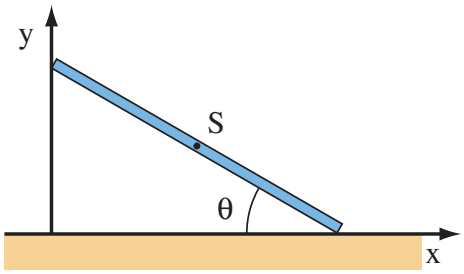
Vi kan konstatera att denna tröghetstensor faktiskt är precis samma som för en homogen cylinder med samma massa. Att vi får samma resultat är egentligen inte så konstigt eftersom den inhomogena cylindern egentligen bara skiljer sig åt genom att vi har tagit en del densitet från ena sidan ($y < 0$) och lagt på andra sidan ($y > 0$) men exakt lika fördelat från z-axeln. Däremot kommer den inohomogena cylindern allmänt sett att bete sig annorlunda dynamiskt, delvis p.g.a. att O ej är masscentrum längre.

Uppgift 2

Vi börjar med att konstatera att problemet har en frihetsgrad eftersom rörelsen antas ske i figurens plan och p.g.a. symmetrin måste då gångjärnets rörelse ske helt vertikalt. Låt vinkeln θ vara vinkeln de respektive stavarna gör med underlaget (dvs den vinkel som är β vid $t = 0$ enligt figuren). Vi kan antingen tänka oss att använda vinkeln θ eller gångjärnets höjd $y = l \sin\theta$ som generaliserad koordinat. Vi väljer här att använda θ som generaliserad koordinat (vilket i detta fall visar sig ge enklare rörelseekvationer).

a) Stavarnas rörelseenergi består av två delar, dels masscentrums rörelseenergi för de två stavarna och dels rotationsenergin runt respektive masscentrum. Vi väljer att räkna ut den kinetiska energin för en av stavarna och multiplicerar sedan detta uttryck med 2 för att få den totala kinetiska energin.

Betrakta den högra staven. Inför ett kartesiskt koordinatssystem enligt figur med stavens masscentrum i S. Koordinaterna för masscentrum ges av



$$\begin{cases} x_S &= \frac{l}{2}\cos\theta \\ y_S &= \frac{l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Masscentrums hastighet ges då av

$$\begin{cases} \dot{x}_S &= -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} \\ \dot{y}_S &= \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

vilket ger oss translationsenergin för den högra stavens masscentrum

$$T_S = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2\right) = \frac{1}{8}ml^2\left(\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2$$

Rotationsenergin för rotationen runt masscentrum ges av

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

där tröghetsmomentet för en tunn homogen stav är $I = \frac{1}{12}ml^2$ och vinkelhastigheten ges i detta fall av $\omega = \dot{\theta}$. Detta ger oss

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta}^2$$

Den kinetiska energin för den högra staven blir således

$$T_{\text{högra staven}} = T_S + T_{\text{rot}} = ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$$

Slutligen blir då den totala kinetiska energin för båda stavarna

$$T = 2T_{\text{högra staven}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$

b) Den potentiella energin ges av

$$U = 2mgy_S = 2mg\frac{1}{2}l\sin\theta = mgl\sin\theta$$

Lagrangianen ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$$

Derivatorna av Lagrangianen är

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta} \end{cases}$$

vilket insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ger oss rörelseekvationerna

$$\frac{2}{3}ml^2\ddot{\theta} + mgl\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2l\ddot{\theta} + 3g\cos\theta = 0$$

Multiplicera denna ekvation med $\dot{\theta}$ så kan vi integrera en gång med avseende på t,

$$\begin{aligned} &2l\ddot{\theta}\dot{\theta} + 3g\cos\theta\dot{\theta} = 0 \\ \Rightarrow\ &l\dot{\theta}^2 + 3g\sin\theta = A \end{aligned}$$

Konstanten A bestäms ur begynnelsevillkoren $\theta(0) = \beta$ och $\dot{\theta}(0) = 0$, vilket ger $A = 3g\sin\beta$, dvs

$$\dot{\theta} = \overset{(+)}{-}\sqrt{\frac{3g}{l}\left(\sin\beta - \sin\theta\right)} \tag{1}$$

där vi väljer den negativa lösningen eftersom den ger korrekt tecken på $\dot{\theta}$ i vårt fall.

Vi söker nu hastigheten hos gångjärnet när den slår ner i det horisontella planet. Hastigheten hos gångjärnet ges av

$$\dot{y} = l\cos\theta\dot{\theta}$$

Sätter vi in ekv. (1) (med $\theta = 0$ vid nedslaget) får vi då slutligen gångjärnets hastighet när det slår i planet

$$\dot{y} = -l\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\beta} = -\sqrt{3gl\sin\beta}$$

Uppgift 3

Vi ska nu ta fram den kinetiska och potentiella energin och använda Lagranges ekvationer för att ta fram rörelseekvationerna. Eftersom vi är intresserade av små svängningar kan vi Taylorutveckla dessa uttryck och bara behålla de termer som är lägst i ordning.
Problemet har två frihetsgrader och vi väljer x och y som våra generaliserade koordinater. Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

där $\dot{z}$ ges av

$$\dot{z} = -c\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\left(-\frac{2x\dot{x}}{a^2}-\frac{2y\dot{y}}{b^2}\right)$$

Om vi Taylorutvecklar rotuttrycket enligt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \simeq 1+\frac{1}{2}\epsilon$$

inser vi att $\dot{z}^2$ kommer att innehålla x, y, $\dot{x}$ och $\dot{y}$ (som alla är små) i ordning fyra och högre, dvs i högre ordning än de andra termerna i T. Vi kan därför försumma $\dot{z}^2$ i T för små oscillationer och erhåller

$$T \simeq \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right).$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mgz = mgc - mgc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

vilket Taylorutvecklat till ordning två i små termer är

$$U \simeq= mgc - mgc\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\cdots\right)\right) \simeq \frac{1}{2}mgc\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Vår Lagrangian blir således (till ordning två i små termer)

$$L = T - U \simeq \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}mgc\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Derivatorna av Lagrangianen är då

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{mgc}{a^2}x \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{mgc}{b^2}y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ erhåller vi rörelseekvationerna,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{mgc}{a^2}x &= 0 \\ m\ddot{y} + \frac{mgc}{b^2}y &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{gc}{a^2}x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{gc}{b^2}y &= 0 \end{cases}$$

Vi känner igen dessa som de vanliga ekvationerna för en harmonisk oscillator och kan således läsa av vinkelfrekvenserna direkt,

$$\begin{cases} \omega_x &= \sqrt{\frac{gc}{a^2}} \\ \omega_y &= \sqrt{\frac{gc}{b^2}} \end{cases}$$

För att kontrollera rimligheten på dessa uttrycke sätter vi $a = b = c = l$ och erhåller vinkelfrekvensen för en plan pendel med längden l, vilket är vad vi borde.

Uppgift 4

a) Det finns många sätt att kontrollera om en funktion $f(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ är en rörelsekonstant. Man kan t.ex. utnyttja att tidsutvecklingen av f ges av

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Eftersom f ej beror explicit av tiden i detta fall räcker det således att undersöka om Poissonparentesen mellan H och f är noll eller inte.

Ett annat sätt att undersöka om f är en rörelsekonstant är att försöka hitta en transformation under vilken problemet är invariant och sedan använda Noethers teorem för att se vilken rörelsekonstant som svarar mot denna transformation. Om man kan hitta en transformation som ger f som en rörelsekonstant har man således visat att f är en rörelsekonstant.

Ett tredje sätt är naturligtvis att lösa systemet fullständigt och sätta in $\underset{\sim}{q}(t)$ och $\underset{\sim}{p}(t)$ i f för att se om den är en rörelsekonstant eller inte.

b) Vi vet att tidsutvecklingen för en kanonisk variabel f ges av

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{2}$$

Låt nu $f = q_1 p_2 - q_2 p_1$ och sätt in detta i Ekv. (2) och kräv att $df/dt = 0$,

$$0 = \frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{0} + \{H, f\} = \{\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2, q_1 p_2 - q_2 p_1\} \tag{3}$$

Notera nu att alla Possionparenteser mellan de kanoniska variablerna är noll förutom

$$\{p_i, q_j\} = 1 \text{ om } i = j.$$

Vi kan vidare utnyttja följande egenskaper hos Poissonparenteserna för att förenkla vårt uttryck,

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \quad ; \quad \{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad ; \quad \{f, g\} = -\{g, f\}$$

Ekv. (3) kan då förenklas till

$$\begin{aligned}
0 &= \{f, H\} = \frac{p_2}{2m}\{q_1, p_1^2\} + a_2 q_1 \{p_2, q_2^2\} - \frac{p_1^2}{2m}\{q_2, p_2^2\} - a_1 q_2 \{p_1, q_1^2\} \\
&= \frac{p_2}{2m} 2p_1 \underbrace{\{q_1, p_1\}}_{-1} + a_2 q_1 2q_2 \underbrace{\{p_2, q_2\}}_{1} - \frac{p_1}{2m} 2p_2 \underbrace{\{q_2, p_2\}}_{-1} - a_1 q_2 2q_1 \underbrace{\{p_1, q_1\}}_{1} \\
&= \frac{p_1 p_2}{2m} - \frac{p_1 p_2}{2m} + 2q_1 q_2 (a_2 - a_1) = 2q_1 q_2 (a_2 - a_1)
\end{aligned}$$

Vi ser således att vi måste kräva att $a_1 = a_2$ för att $q_1 p_2 - q_2 p_1$ ska vara en rörelsekonstant.

Uppgift 5

a) Hamiltonfunktionen för detta system är

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy$$

Insatt i Hamilton-Jacobis ekvation erhåller vi då följande ekvation för vår sökta verkansfunktion S^*:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial y}\right)^2 + mgy + \frac{\partial S^*}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

Ansätt nu att S^* är separabel, d.v.s. att

$$S^*(x, y, \underset{\sim}{\alpha}, t) = S_1^*(x, \underset{\sim}{\alpha}) + S_2^*(y, \underset{\sim}{\alpha}) - Et$$

där vi kan välja vår separationskonstant $E = \alpha_1$ där α_1 är ett av våra två nya konstanta rörelsemängder $\underset{\sim}{P}$. Insatt i Ekv. (4) får vi då

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x}\right)^2}_{\frac{1}{2m}\alpha_2^2} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial y}\right)^2 + mgy}_{\alpha_1 - \frac{1}{2m}\alpha_2^2} = \alpha_1$$

Eftersom den första termen bara beror av x och den andra bara av y måste de vara konstanter och vi väljer den första till $\alpha_2^2/2m$. Den andra termen måste då vara $\alpha_1 - \alpha_2^2/2m$ för att ekvationen ska vara uppfylld. Vi får då följande ekvationer för S_1^* och S_2^*

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x}\right)^2 = \alpha_2^2 \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial y}\right)^2 + mgy = \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2m} \end{cases}$$

Dessa ekvationer integreras enkelt till

$$\begin{cases} S_1^* &= \alpha_2 x + \text{konst.} \\ S_2^* &= -\frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy\right)^{\frac{3}{2}} + \text{konst.} \end{cases}$$

vilket ger oss den sökta verkansfunktionen

$$S^*(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x - \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy\right)^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 t \tag{5}$$

där den godtyckliga additiva konstanten har satts till noll.

b) Med den genererande funktionen S^* i Ekv. (5) kan vi generera en kanonisk transformation till nya variabler $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}\}$ med den nya Hamiltonfunktionen $\tilde{H} = 0$. Från variabelsambanden för denna typ av genererande funktion erhåller vi

$$\begin{cases} Q_1 &= \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy} - t \\ Q_2 &= \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_2} = x + \frac{\alpha_2}{m^2 g}\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy} \end{cases}$$

Ur dessa kan vi lösa ut x och y som funktioner av Q_1 och Q_2 (samt $\underset{\sim}{\alpha}$):

$$x = Q_2 + \frac{\alpha_2}{m}(t + Q_1) \tag{6}$$

$$y = \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{\alpha_2^2}{2m^2 g} - \frac{g}{2}(t + Q_1)^2 \tag{7}$$

Eftersom $\tilde{H} = 0$ vet vi från Hamiltons kanoniska ekvationer i de nya variablerna att både $\underset{\sim}{Q}$ och $\underset{\sim}{P}$ är konstanter. Dessa får vi bestämma från våra begynnelsevillkor: $\dot{x}(0) = v_0$ ger i

Ekv. (6) att $\alpha_2 = v_0$, $\dot{y}(0) = 0$ ger i Ekv. (7) att $Q_1 = 0$, $x(0) = 0$ ger i Ekv. (6) att $Q_2 = 0$ samt slutligen $y(0) = h$ ger i Ekv. (7) att $\frac{\alpha_1}{mg} - \frac{v_0^2}{2g} = h$. Vår lösning är således

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

vilket är precis vad vi skulle få med Newtons andra lag för detta enkla problem.