Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

18 mars 2005

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Välj θ som vår generaliserade koordinat. Hastigheten ges då av $v = R\dot{\theta}$ och höjden över det nedre jämviktsläget är $z = R(1 - \cos\theta)$. Lagrangefunktionen ges då av

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mgR(1 - \cos\theta)$$

Den kanoniska impulsen ges av

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

och vi kan nu skriva Hamiltonfunktionen som

$$H(\theta, p_\theta) = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{mR^2}{2}\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + mgR(1 - \cos\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + mgR(1 - \cos\theta)$$

Hamiltons ekvationer ger nu

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & = & \frac{p_\theta}{mR^2 l} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} & = & -mgR\sin\theta \end{array} \right.$$

För små svängningar kan vi sätta $\sin\theta \simeq \theta$,

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & = & \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} & = & -mgR\theta \end{array} \right.$$

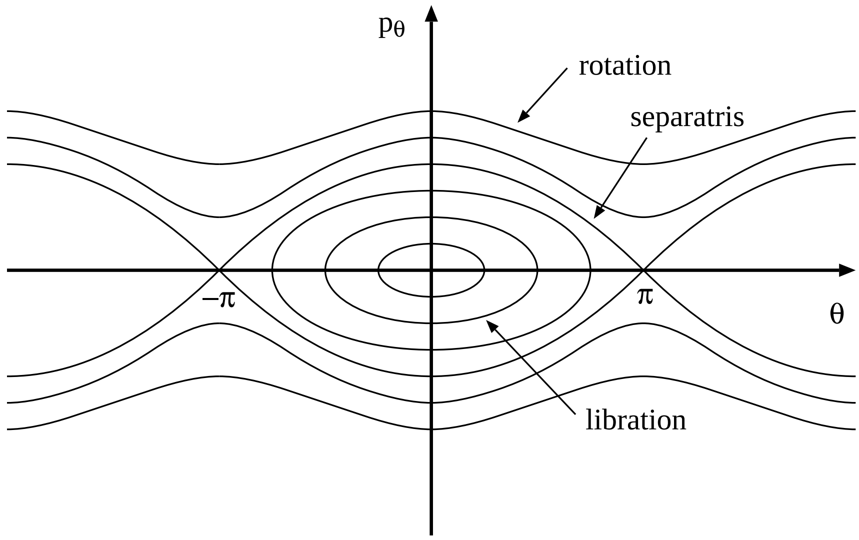
Derivera den andra ekvationen med avseende på tiden och sätt in uttrycket för $\dot{\theta}$ från den första ekvationen så får vi

$$\ddot{p}_\theta = -mgR\dot{\theta} = -\frac{g}{R}p_\theta$$

Denna löses enkelt och vi får lösningen

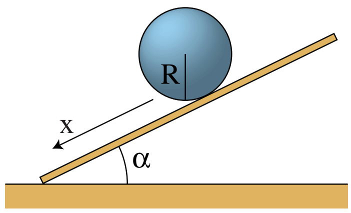
$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_\theta & = & A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \theta_0\right) \\ \theta & = & \frac{A}{mR\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \theta_0\right) \end{array} \right.$$

b) Fasrummet, $\mathbf{P}$, spänns upp av $\{\theta, p_\theta\}$ och för allmänna utslagsvinklar har vi följande fasporträtt:



För små utslagsvinklar är lösningskurvorna (nästan) elipser. För så stora utslagsvinklar att pendeln slår över har vi rotation. När rörelsen är precis så att pendeln kan nå upp till översta punkten med hastigheten noll så befinner vi oss mitt emellan och den kurvan kallas för separatris.

Uppgift 2



a) Problemet har en frihetsgrad och vi kan välja läget längs med planet som vår generaliserade koordinat. Låt oss kalla denna x enligt figur. Den kinetiska energin består av två delar,

$$T = T_S + T_{\mathrm{rot}}$$

där T_S är translationsenergin för masscentrums rörelse och T_{rot} är rotationsenergin för rotationen kring masscentrum. T_S ges av

$$T_S = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

där M är massan hos bollen. Rotationsenergin ges av

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

där I är tröghetsmomentet för rotation kring rotationsaxeln (eftersom bollen är sfäriskt symmetrisk är alla tröghetsmoment lika). Vi har också utnyttjat att vinkelfrekvensen ges av $\dot{x}/R$. Potentialen från gravitationsfältet ges av

$$U = -Mgx \sin\alpha$$

och vi får då vår Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) + Mgx\sin\alpha$$

Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, ger oss rörelseekvationen

$$M\ddot{x}\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) - Mg\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}} \tag{1}$$

För en homogen boll med radie R och massan M ges tröghetsmomentet (för rotation runt valfri axel) av

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Insatt i ekv. (1) ger detta oss

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}g\sin\alpha \tag{2}$$

vilket är vad som skulle visas.

b) Vi har nu istället en boll med ett hål i mitten. Vi kan antingen betrakta denna boll som en boll med samma massa som i a) men med ett hål i mitten (dvs en boll med högre densitet), eller så kan vi betrakta denna boll som bollen i a) men med mitten borttagen (dvs en något lättare boll). Vilket vi gör spelar ingen roll då accelerationen inte beror av den totala massan (i ekv. (1) är $I \propto M$ vilket ger att $\ddot{x}$ ej beror av massan). Låt oss betrakta denna boll som samma boll som i a) men med ett hål i mitten. Massan på denna ihåliga boll är då

$$M_{\text{ny}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R/2)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}M = \frac{R^3 - (R/2)^3}{R^3}M = \frac{7}{8}\ M$$

För att beräkna tröghetsmomentet för denna ihåliga boll kan vi ta tröghetsmomentet för en homogen boll med radie R och dra bort tröghetsmomentet för en homogen boll med radie $R/2$ (eftersom tröghetstensorn är linjär). Vi får då vårt nya tröghetsmoment för vår ihåliga boll

$$I_{\text{ny}} = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{5}\frac{1}{8}M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = MR^2\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{80}\right) = \frac{31}{80}MR^2$$

där vi har utnyttjat att den borttagna massan för hålet är $M/8$. Insatt i ekv. (1) ger oss detta accelerationen för den ihåliga bollen

$$\ddot{x}_{\text{ny}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{M_{\text{ny}}R^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{\frac{31}{80}MR^2}{\frac{7}{8}MR^2}} = \frac{7}{8}\frac{g\sin\alpha}{\frac{7}{8} + \frac{31}{80}} = \frac{70}{101}g\sin\alpha$$

Kvoten mellan den nya accelerationen för den ihåliga bollen och den tidigare för den homogena bollen blir då slutligen

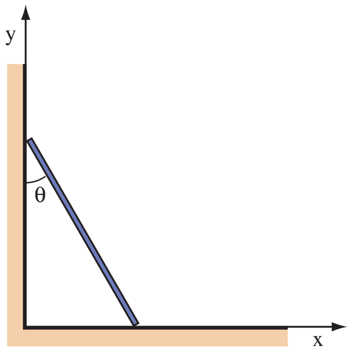
$$\frac{\ddot{x}_{\text{ny}}}{\ddot{x}} = \frac{\frac{70}{101}}{\frac{5}{7}} = \frac{98}{101}$$

Accelerationen för den ihåliga bollen är således $\frac{98}{101}$ av accelerationen för den homogena bollen.

Eftersom den ihåliga bollen har massan (i genomsnitt) placerad längre ut från rotationsaxeln så har den ett högre tröghetsmoment för en given massa på bollen. Det innebär att rotationsenergin kommer att bli större (för en given vinkelfrekvens). Detta i sin tur leder till att den ihåliga bollen kommer att vara "mer trög" att få fart på. Den borde därför accelerera långsammare, vilket vi också finner.

Uppgift 3

a) Problemet har en frihetsgrad och vi väljer vinkeln θ mellan stegen och väggen som generaliserad koordinat. Inför också kartesiska koordinater x och y för stegens masscentrum. Följande relation mellan θ och våra kartesiska koordinater gäller:



$$\begin{cases} x = \frac{l}{2}\sin\theta \\ y = \frac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

Vi kan då skriva upp den kinetiska energin för stegen som

$$T = T_S + T_{\rm rot} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}\underbrace{I_z}_{\frac{ml^2}{12}}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

vilket ger oss vår Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{2}\cos\theta$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen blir

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{mgl}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$, ger oss nu rörelseekvationerna,

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \tag{3}$$

b) Stegen förlorar kontakten med väggen då accelerationen i x-led är noll ty då är kraften från väggen noll enligt Newtons andra lag. Accelerationen i x-led ges av

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta}$$

Från rörelseekvationerna, Ekv. (3) känner vi $\ddot{\theta}$ som funktion av θ, men vi behöver också $\dot{\theta}^2$ som funktion av θ. Detta kan vi antingen få genom att sätta upp den totala energin och konstatera att den är bevarad, men vi kan också få $\dot{\theta}^2$ från rörelseekvationerna, Ekv. (3), genom att multiplicera dessa med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden,

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{mgl}{2}\sin\theta\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2}\cos\theta = A$$

där konstanten A bestäms från begynnelsevillkoren $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \alpha$, vilket ger $A = \frac{mgl}{2}\cos\alpha$. Vi kan då skriva vårt uttryck för $\ddot{x}$ som

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\left[\frac{3g}{l}\cos\alpha - \frac{3g}{l}\cos\theta\right] + \frac{l}{2}\cos\theta\left[\frac{3g}{2l}\sin\theta\right] = \left[\frac{9}{4}\cos\theta - \frac{3}{2}\cos\alpha\right]g\sin\theta$$

vilket är noll då

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)$$

d v s detta är den vinkel vid vilken stegen förlorar kontakten med väggen.

Uppgift 4

a) Funktionalen $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ antar ett extremvärde då variationsproblemets Euler-ekvation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

är uppfylld. Vi vill visa att Euler-ekvationen ovan är ekvivalent med

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{5}$$

Denna ekvation kallas ibland för variationsproblemets första integral.

Enklaste sättet att visa att de två uttrycken är ekvivalenta är att ta det andra uttrycket, utföra derivatorna och se att vi då erhåller Euler-ekvationen. Låt oss göra detta. Kom dock ihåg att $f = f(x, y, y')$ så när vi utför den totala derivatan $\frac{d}{dx}$ får vi många inre derivator enligt kedjeregeln. Vi får då

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\\ = \quad & -\frac{\partial f}{\partial y}\, y' + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y' \underbrace{\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\right]}_{\substack{= 0 \text{ enligt} \\ \text{Euler-ekvationen}}} = 0\end{aligned}$$

Ekv (5) följer alltså från Euler-ekvationen, ekv. (4). Vi har då visat ena riktningen av ekvivalensen. Eftersom den triviala lösningen $y' \equiv 0$ ej kan gälla för generella lösningar till variationsproblemet kan vi sluta oss till att Euler-ekvationen följer från ekv. (5). Vi har då visat att de två ekvationerna är ekvivalenta.

b) Enklast är att skriva funktionalen på formen

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c}ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(y)}{c}\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Vår funktion f ges då av

$$f(x,y,y') = f(y,y') = \frac{n(y)}{c}\sqrt{1+y'^2}$$

dvs f beror ej explicit av x. Det är då mycket enklare att använda ekv. (5) istället för Euler-ekvationen för att hitta $y(x)$. Utnyttjar vi att $f = f(y,y')$ i ekv. (5) erhåller vi

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ &\Rightarrow f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Med vårt uttryck för f blir detta

$$\begin{aligned} \text{konst.} &= \frac{n(y)}{c}\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}2y' = \frac{n(y)}{c}\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] \\ &= \frac{n(y)}{c}\left[\frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{n(y)}{c}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Eftersom Snells lag är uttryckt med infallsvinklarna skriver vi om detta uttryck med hjälp av dessa. Eftersom $\cot\theta = \frac{dy}{dx}$ kan vi skriva om detta som

$$\text{konst.} = \frac{n(y)}{c}\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} = \frac{n(y)}{c}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} = \frac{n(y)}{c}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}} = \frac{n(y)}{c}\sin\theta$$

Om vi bakar in ljushastigheten c i vår konstant så erhåller vi

$$n(y)\sin\theta = \text{konst.}$$

Detta ska gälla för hela färden[1] och då i synnerhet i gränsen mellan de två olika materialen. Vi erhåller således

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

vilket är Snells lag som skulle visas.

Uppgift 5

a) Utgå från vår ansats

$$\Psi(q,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)} \quad ; \quad A = \text{ konstant.} \tag{7}$$

Derivatorna av Ψ med avseende på q och t ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial t}Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial t}\Psi \\ \frac{\partial\Psi}{\partial q} &= \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial q}Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial q}\Psi \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial q^2} &= \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\Psi + \frac{\partial S^*}{\partial q}\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} + \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\right]\Psi \end{aligned}$$

[1]När vi inte är vid gränsen mellan de två materialen är $n(y)$ en konstant och vi får då att θ också är en konstant, dvs vi erhåller att ljuset går rakt då brytningsindex ej ändras.

Sätt in dessa derivator i Schrödingerekvationen och vi erhåller

$$\left[\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2 + U\right] + \frac{\partial S^*}{\partial t}\right]\Psi = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\Psi. \tag{8}$$

Ψ kan vi dividera bort och ekv. (8) kan då skrivas

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2 + U\right] + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} \tag{9}$$

Vänsterledet känner vi igen som vår nya Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ om vi identifierar $S^*(q,t)$ med verkansfunktionen. Den nya Hamiltonfunktionen ska ju dock vara noll, men högerledet i ekv. (9) är skilt från noll.

b) Högerledet i ekv. (9) kan försummas om

$$\hbar\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} \ll \left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2. \tag{10}$$

Vi skriver nu om detta uttryck så att det blir tydligare när det är uppfyllt. Eftersom $p = \frac{\partial S^*}{\partial q}$ kan vi skriva ekv. (10) som

$$\hbar\frac{\partial p}{\partial q} \ll p^2$$

Utnyttja nu att deBroglie-våglängden är given av

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

vilket ger att villkoret skrivas

$$\frac{(\partial p/\partial q)}{p/\lambda} \ll 2\pi.$$

Dvs när våglängden är så liten att rörelsemängden ändras försumbart lite över en våglängd, då kan vi försumma högerledet i ekv. (9) och vi erhåller vår klassiska Hamilton-Jacobi-ekvation.

Notera att vi också kan erhålla den klassiska gränsen, i detta fall Hamilton-Jacobis ekvation, genom att låta $\hbar \to 0$, dvs genom att försumma kvantiseringen av verkan.