Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

20 augusti 2004

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2} m \left(R \sin\theta \omega \hat{\boldsymbol{\varphi}} + R\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\omega^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \right)$$

och den potentiella energin ges av

$$U = mgR\,(1 - \cos\theta)$$

Lagrangefunktionen ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{2} m R^2 \left(\omega^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \right) - mgR\,(1 - \cos\theta)$$

och dess derivator är

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} & = & mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} & = & mR^2\dot{\theta} \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

ger detta

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \tag{1}$$

vilket är den sökta rörelseekvationen för θ.

b) Från ekv. (1) ser vi att $\ddot{\theta} = 0$ för $\theta = 0$ varför $\theta = 0$ är en jämviktspunkt. För att ta reda på om den är stabil eller inte Taylorutvecklar vi högerledet i ekv. (1) och tar med upp till linjära termer i θ, dvs vi sätter

$$\begin{cases} \sin\theta & \simeq & \theta \\ \cos\theta & \simeq & 1 \end{cases}$$

vilket ger

$$mR^2\ddot{\theta} \simeq \left(mR^2\omega^2 - mgR \right)\theta$$

Denna ekvation har oscillerande cos- och sin-lösningar om koefficienten framför θ i högerledet är negativ, annars är lösningen exponentialfunktioner. För att lösningen ska vara stabil måste därför koefficienten vara negativ, dvs

$$\begin{aligned} mR^2\omega^2 - mgR < 0 \\ \Rightarrow \omega^2 < \tfrac{g}{R} \\ \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\tfrac{g}{R}} \end{aligned}$$

c) Från ekv. (1) ser vi att $\ddot{\theta} = 0$ då

$$\sin\theta\left(mR^2\omega^2\cos\theta - mgR\right) = 0.$$

Vi ser att denna ekvation är uppfylld då

$$\sin\theta = 0 \quad \text{eller} \quad \cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

Den första av dessa ger de två jämviktspunkterna $\theta = 0$ och $\theta = \pi$, medan den andra ekvationen endast har en lösning då $\omega > \omega_c$ då jämviktspunkten är

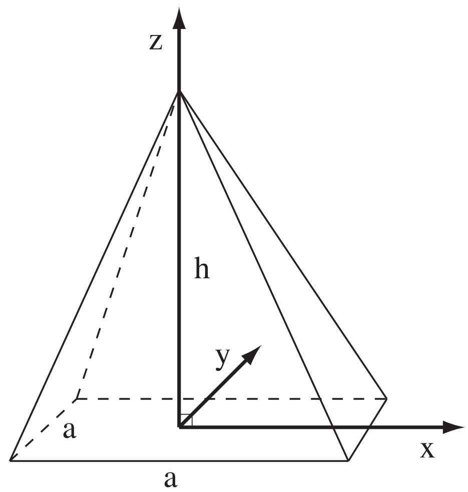
$$\theta = \arccos\frac{g}{R\omega^2}$$

Man kan visa att denna jämviktspunkt är stabil genom att Taylorutveckla högerledet i ekv. (1) runt $\theta = \arccos\frac{g}{R\omega^2}$.

Uppgift 2

a) Vi börjar med att införa ett kartesiskt koordinatsystem med origo i basens centrum och med x- och y-axlarna vinkelräta mot basens sidor (se figur). För att beräkna masscentrums läge måste vi först räkna ut volymen så att vi vet vad pyramidens densitet är. Notera att volymen för ett tunt skikt med höjden dz på höjden z ges av

$$dV = dz\left[\left(1 - \frac{z}{h}\right)a\right]^2 = a^2\left(1 + \frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z}{h}\right)dz$$



Volymen blir därför

$$V = \int_0^h a^2\left(1 + \frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z}{h}\right)dz = a^2\left[z + \frac{z^3}{3h^2} - 2\frac{z^2}{2h}\right]_0^h = a^2\left[h + \frac{h}{3} - h\right] = \frac{1}{3}a^2h$$

Detta ger oss densiteten

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{a^2h}$$

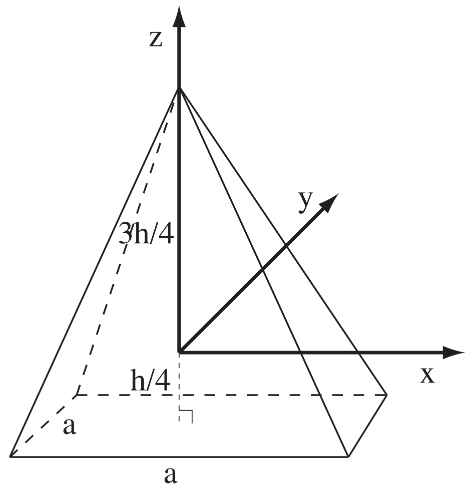
Massan i ett tunt skikt med höjden dz på höjden z är således

$$d\sigma = \rho dV = \frac{3m}{h}\left(1 + \frac{z^2}{h^2} - 2\frac{z}{h}\right) dz$$

P.g.a. symmetrin måste masscentrum S ligga på z-axeln och vi kan därför beräkna masscentrums z-koordinat som ett viktat medelvärde av z där vikten är massandelen i respektive tunt skikt, d.v.s.

$$z_S = \frac{1}{m}\int_0^h z d\sigma = \frac{1}{m}\frac{3m}{h}\int_0^h \left(z + \frac{z^3}{h^2} - 2\frac{z^2}{h}\right) dz = \frac{3}{h}\left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4h^2} - 2\frac{z^3}{3h}\right]_0^h = \cdots = \frac{h}{4}$$

b) Inför nu ett nytt koordinatsystem med origo i masscentrum S enligt figur. Tröghetstensorns komponenter ges i detta system av



$$I_{ij} = \int\int\int \rho\, dxdydz \left[\delta_{ij}\mathbf{r}^2 - r_i r_j\right]$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn till en punkt i pyramiden. Eftersom vi har valt vårt koordinatsystem så att pyramiden är spegelsymmetrisk i både xz- och yz-planet är alla tröghetsprodukter noll. Som exempel, betrakta xz-komponenten av tröghetstensorn,

$$I_{xz} = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \rho\, xz$$

där gränserna för de olika integrationerna explicit har angetts. Integralen i x-led är en integral av en udda funktion över ett symmetriskt intervall och är således noll. Därför är $I_{xz} = 0$. På samma sätt kan man visa att alla övriga tröghetsprodukter är noll.

Tröghetsmomenten I_{xx}, I_{yy} och I_{zz} är däremot inte noll, utan måste beräknas. Låt oss börja med I_{zz},

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \rho \left(x^2 + y^2\right) \\
&= \frac{3m}{a^2 h}\int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \left(x^2 + y^2\right) \\
&= \frac{3m}{a^2 h}\int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{y=\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} \\
&= \cdots \quad = \frac{ma^2}{10}
\end{aligned}$$

På samma sätt kan vi räkna ut tröghetsmomentet I_{xx},

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \rho \left(y^2+z^2\right) \\
&= \frac{3m}{a^2h} \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \left(y^2+z^2\right) \\
&= \cdots \quad = m\left[\frac{a^2}{20}+\frac{3h^2}{80}\right]
\end{aligned}
$$

P.g.a. symmetrin är $I_{yy} = I_{xx}$ och vi har således alla tröghetstensorns komponenter beräknade. Tröghetstensorn ges således av

$$
\mathbf{I} = \begin{pmatrix} m\left[\frac{a^2}{20}+\frac{3h^2}{80}\right] & 0 & 0 \\ 0 & m\left[\frac{a^2}{20}+\frac{3h^2}{80}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{10} \end{pmatrix}
$$

Uppgift 3

Vi har en frihetsgrad och kan välja förlängningen x av fjädern AB jämfört med dess naturliga längd som vår generaliserade koordinat.

a) Vid jämvikt, $x = x_0$, gäller att kraften på massan m från gravitationen och fjädern tar ut varandra, dvs att

$$
mg = kx_0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{mg}{k}
$$

b) Den potentiella energin kan skrivas som

$$
V(x) = -mgx + \frac{1}{2}kx^2
$$

Den kinetiska energin ges dels av rörelsen hos massan m och rotationen hos cylindern. Notera att vridningsvinkeln för cylindern ges av x/R och vinkelfrekvensen är därför $\omega = \dot{x}/R$. Tröghetsmomentet med avseende på cylinderns symmetriaxel ges av $I = MR^2$ och den kinetiska energin ges därför av

$$
T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 MR^2 = \left(\frac{M}{2}+\frac{m}{2}\right)\dot{x}^2.
$$

Lagrangianen ges nu av

$$
L = \left(\frac{M}{2}+\frac{m}{2}\right)\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2
$$

Derivatorna m a p $\dot{x}$ och x ges av

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M+m)\,\dot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= mg - kx
\end{aligned}
$$

Lagranges ekvationer ger nu

$$
(M+m)\,\ddot{x} + kx = mg
$$

Den homogena ekvationen har lösningen

$$x_h = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t + \beta\right)$$

och partikulärlösningen ges av

$$x_p = \frac{mg}{k}.$$

Vi har således den allmänna lösningen

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t + \beta\right) + \frac{mg}{k}.$$

Vårt begynnelsevillkor $\dot{x}(0) = 0$ ger $\beta = 0$ och $x(0) = 0$ ger $A = -\frac{mg}{k}$. Lösningen med våra begynnelsevillkor lyder således

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)\right]$$

dvs vi har svängningar runt vårt jämviktsläge x_0 med amplituden $\frac{mg}{k}$ och vinkelfrekvensen $\sqrt{\frac{k}{M+m}}$.

Uppgift 4

a) Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

b) Man kan visa att $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ genererar en kanonisk transformation på två sätt:

   i) man kan först utifrån Hamiltons variationsprincip visa att $\Phi(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{Q}, t)$ kan generera en kanonisk transformation (och ta fram variabelsambanden) och sedan ta fram $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ som Legendretransformen av Φ (så när som på ett tecken) med avseende på $\underset{\sim}{Q}$ (se Scheck, avsnitt 2.23)

   ii) eller så kan man från Hamiltons variationsprincip direkt visa att $S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t)$ kan generera en kanonsisk transformation.

Här nedan visas hur man går till väga enligt ii).

Vi kan visa att transformationen är kanonisk genom att kräva att Hamiltons variationsprincip är uppfylld både i de gamla variablerna,

$$\delta \int \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t)\right] dt = 0 \tag{2}$$

och i de nya variablerna,

$$\delta \int \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)\right] dt = 0. \tag{3}$$

Detta är säkerställt om integranderna i Ekv. (2) och (3) inte skiljer sig med mer än en total tidsderivata av en funktion $M(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t)$, d v s om

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P}, t) + \frac{dM}{dt}. \tag{4}$$

Välj nu

$$M = S(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{P}, t) - \sum_i Q_i P_i \tag{5}$$

där vi har rätt att lägga till den sista summan eftersom rörelseekvationerna inte ändras om vi lägger till en total tidsderivata av en funtion av de kanoniska variablerna. Derivera nu M med avseende på t,

$$\frac{dM}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t} - \sum_i \dot{Q}_i P_i - \sum_i Q_i \dot{P}_i$$

Om vi sätter in detta uttryck i Ekv. (4) och kräver att faktorerna framför $\dot{q}_i$ och $\dot{P}_i$ ska ta ut varandra (det är för att kunna göra denna identifikation som $\sum_i Q_i P_i$ lades till i Ekv. (5)) får vi variabelsambanden

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \end{cases}$$

För att Ekv. (4) ska gälla måste dessutom följande samband gälla för Hamiltonfunktionerna,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Uppgift 5

a) Noethers teorem ser ut som följer:

Om Lagrangefunktionen $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen $\underset{\sim}{q} \to \underset{\sim}{h}^s(\underset{\sim}{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $\underset{\sim}{h}^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen så är

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h_i^s(\underset{\sim}{q}) \Big|_{s=0}$$

en rörelsekonstant.

och bevisas t.ex. på följande vis:

Låt $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\varphi}$ vara en lösning till Lagranges ekvationer. Eftersom systemet är invariant under transformationen $\underset{\sim}{h}^s$ är

$$\underset{\sim}{q}(s,t) = \phi(s,t) = \underset{\sim}{h}^s(\underset{\sim}{\varphi}(t))$$

också en lösning till Lagranges ekvationer,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t))\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) \tag{6}$$

Vidare är L invariant under transformationen, d.v.s.

$$0 = \frac{d}{ds} L(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) = \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{\phi}_i}{ds} \right] \tag{7}$$

Använd nu Ekv. (6) för att byta ut $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ i Ekv. (7) samt byt ordning på deriveringarna i den sista termen så erhåller vi

$$\sum_{i=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi_i}{ds} \right) \right] = 0$$

Detta måste speciellt gälla då $s = 0$ och vi erhåller då slutligen (med $d\phi_i/ds = dh_i^s/ds$)

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dh_i^s}{ds} \right) \Bigg|_{s=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} I = 0$$

b) Lagrangefunktionen är invariant under rotation kring en godtycklig axel. Låt oss lägga vårt koordinatsystem så att denna godtyckliga axel är z-axeln. Vi kan då beskriva transformationen som

$$h^s : \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \to \mathbf{r}' = (x', y', z') = (x \cos s + y \sin s, -x \sin s + y \cos s, z)$$

Vi får då

$$\frac{d}{ds} h^s \Big|_{s=0} = (y, -x, 0) = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}$$

Vår rörelsekonstant ges då enligt Noethers teorem av

$$I = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h_i^s \Bigg|_{s=0} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}} = \{\text{vektoranalys}\} = \hat{\mathbf{z}} \cdot (m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L} = -L_z$$

d.v.s. invarians under rotation kring z-axeln betyder att z-komponenten av rörelsemängdsmomentet $\mathbf{L}$ är bevarad. Eftersom vi nu har invarians för rotation runt alla axlar, måste alla komponenter av $\mathbf{L}$ vara bevarade, d.v.s. $\mathbf{L}$ är en rörelsekonstant.