Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

1 juni 2004

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Tröghetstensorn ges av

$$\overleftrightarrow{I} = \int \left[\vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\vec{x}\right]\rho(\vec{x})d^3x$$

där $\vec{x}\cdot\vec{x}$ är en vanlig skalärprodukt och $\vec{x}\vec{x}$ är en dyadprodukt. I ett kartesiskt koordinatsystem ges komponenterna av

$$I_{ij} = \int \left[\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j\right]\rho(\vec{x})d^3x. \tag{1}$$

b) I_{xz} ges enligt Ekv. (1) av

$$I_{xz} = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, xz\rho(\vec{x}).$$

Eftersom kroppen är spegelsymmetrisk i xy-planet gäller att $\rho(x,y,-z) = \rho(x,y,z)$ varför vi kan skriva I_{xz} som

$$I_{xz} = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\int_{-\infty}^{0} dz\, xz\rho(x,y,z) + \int_{0}^{\infty} dz\, xz\rho(x,y,z)\right]$$

Byt nu $(x,y,z) \to (x,y,z') = (x,y,-z)$ i den första integralen,

$$\begin{aligned} I_{xz} &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\int_{\infty}^{0} dz'\, xz'\, \underbrace{\rho(x,y,-z')}_{\rho(x,y,z')} + \int_{0}^{\infty} dz\, xz\rho(x,y,z)\right] \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[-\int_{0}^{\infty} dz'\, xz'\rho(x,y,z') + \int_{0}^{\infty} dz\, xz\rho(x,y,z)\right] = 0 \end{aligned}$$

d v s för varje volymselement vid (x,y,z) finns ett volymselement vid $(x,y,-z)$ som bidrar lika mycket till I_{xz} fast med motsatt tecken. $I_{zx} = 0$ p g a att $\overleftrightarrow{I}$ är symmetrisk.

Att $I_{yz} = I_{zy} = 0$ visas på samma sätt.

c) Enligt Ekv. (1) har vi

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int (x^2+y^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &\leq \int (z^2+x^2+y^2+z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= \int (z^2+x^2)\rho(\vec{x})d^3x + \int (y^2+z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= I_{yy}+I_{xx}, \end{aligned}$$

d v s, $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$, vilket är precis vad som skulle visas.
Likhet gäller då

$$\int z^2 \rho(\vec{x})d^3x = 0,$$

d v s då kroppen saknar utsträckning i z-led, d v s är en tunn plan skiva i xy-planet.

Uppgift 2

a) Problemet har en frihetsgrad och vi kan välja massan ms avstånd r från rotationsaxeln som generaliserad koordinat. Den kinetiska och potentiella energin ges då av

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\right) \quad ; \quad U = \frac{1}{2}k\left(r-b\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(r^2+b^2-2br\right)$$

Lagrangianen ges således av

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\right) - \frac{1}{2}k\left(r^2+b^2-2br\right)$$

Dess derivator är

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) = m\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m\omega_0^2 r + kb - kr = (m\omega_0^2 - k)r + kb \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger då rörelseekvationerna

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r = \frac{kb}{m} \tag{2}$$

b) Rörelseekvationen, Ekv. (2), har den allmänna lösningen

$$r(t) = r_h(t) + r_p(t)$$

där $r_h(t)$ är lösningen till den homogena ekvationen (med högerledet lika med noll) och $r_p(t)$ är partikulärlösningen för det högerled rörelseekvationen har. Partikulärlösningen ges av

$$r_p(t) = \frac{kb}{m\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}$$

För den homogena ekvationen får vi olika typer av lösningar beroende på tecknet på koefficienten $\frac{k}{m} - \omega_0^2$:

$$\begin{cases} \frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0 & \Rightarrow \text{Oscillerande cos- och sin-lösningar} \\ \frac{k}{m} - \omega_0^2 < 0 & \Rightarrow \text{Exponentiellt växande cosh- och sinh-lösningar} \\ \frac{k}{m} - \omega_0^2 = 0 & \Rightarrow \text{Linjärt växande/avtagande (eller konstanta) lösningar} \end{cases}$$

c) Partikulärlösningen ges i detta fall av

$$r_p(t) = 2b$$

Den homogena ekvationen ges av

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$$

vilken har lösningen

$$r_h(t) = A\sin(\omega_0 t + \beta) \quad ; \quad A, \beta = \text{konstanter}$$

vilket ger den fullständiga lösningen

$$r(t) = A\sin(\omega_0 t + \beta) + 2b.$$

Begynnelsevillkoret $\dot{r}(0) = 0$ ger att $\beta = \pi/2$ medan $r(0) = b$ ger att $A = -b$. Lösningen ges således av

$$r(t) = 2b - b\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = 2b - b\cos\omega_0 t.$$

Massan m utför med andra ord harmoniska oscillationer runt jämviktsläget $2b$ med amplituden b.

Uppgift 3

Vi ska nu ta fram den kinetiska och potentiella energin och använda Lagranges ekvationer för att ta fram rörelseekvationerna. Eftersom vi är intresserade av små svängningar kan vi Taylorutveckla dessa uttryck och bara behålla de termer som är lägst i ordning.
Problemet har två frihetsgrader och vi väljer x och y som våra generaliserade koordinater. Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

där $\dot{z}$ ges av

$$\dot{z} \;= -c\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\left(-\frac{2x\dot{x}}{a^2} - \frac{2y\dot{y}}{b^2}\right)$$

Om vi Taylorutvecklar rotuttrycket enligt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$$

inser vi att $\dot{z}^2$ kommer att innehålla x, y, $\dot{x}$ och $\dot{y}$ (som alla är små) i ordning fyra och högre, dvs i högre ordning än de andra termerna i T. Vi kan därför försumma $\dot{z}^2$ i T för små oscillationer och erhåller

$$T \simeq \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right).$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mgz = mgc - mgc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

vilket Taylorutvecklat till ordning två i små termer är

$$U \simeq= mgc - mgc\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \cdots\right)\right) \simeq \frac{1}{2}mgc\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Vår Lagrangian blir således (till ordning två i små termer)

$$L = T - U \simeq \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}mgc\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Derivatorna av Lagrangianen är då

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{mgc}{a^2}x \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{mgc}{b^2}y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ erhåller vi rörelseekvationerna,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{mgc}{a^2}x &= 0 \\ m\ddot{y} + \frac{mgc}{b^2}y &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{gc}{a^2}x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{gc}{b^2}y &= 0 \end{cases}$$

Vi känner igen dessa som de vanliga ekvationerna för en harmonisk oscillator och kan således läsa av vinkelfrekvenserna direkt,

$$\begin{cases} \omega_x &= \sqrt{\frac{gc}{a^2}} \\ \omega_y &= \sqrt{\frac{gc}{b^2}} \end{cases}$$

För att kontrollera rimligheten på dessa uttrycke sätter vi $a = b = c = l$ och erhåller vinkelfrekvensen för en plan pendel med längden l, vilket är vad vi borde.

Uppgift 4

Hamiltons princip säger att funktionalen

$$I[\underset{\sim}{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\underset{\sim}{q}(t), \dot{\underset{\sim}{q}}(t), t)dt$$

antar ett extremvärde då $\underset{\sim}{q}$ beskriver den faktiska rörelsen hos systemet. Det innebär att vi kan kräva att variationen av I är noll och på så sätt få fram rörelseekvationerna. Utför en liten variation av $\underset{\sim}{q}$ runt den lösning som gör att $\delta I = 0$. Denna variation kan parametriseras som

$$\underset{\sim}{q}(t,\alpha) = \underset{\sim}{q}(t) + \alpha\underset{\sim}{\eta}(t)$$

där $\underset{\sim}{\eta}(t)$ är en uppsättning godtyckliga funktioner som är noll i ändpunkterna och α är en parameter som avgör hur långt vi är från lösningen $\underset{\sim}{q}$ som ger $\delta I = 0$. Variationen av I ges då av

$$\begin{aligned}
\delta I \quad &\equiv \quad \frac{dI}{d\alpha}d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha}\right)d\alpha = \left\{\begin{array}{c}\text{Partiell} \\ \text{integration} \\ \text{av 2:a termen}\end{array}\right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}d\alpha + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}}_{\eta_k(t)}d\alpha\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ ty } \eta_k(t_1) = \eta_k(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}d\alpha \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}}_{\eta_k(t)}d\alpha
\end{aligned}$$

Vi kräver nu att $\delta I = 0$. Eftersom $\eta_k(t)$ är godtyckliga funktioner så måste varje term (delen inom hakparenteserna) i summan vara noll var för sig[1]. Vi erhåller då slutligen

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \qquad ; \qquad \forall\, k = 1, \ldots, f$$

vilket är de sökta Lagranges ekvationer.

Uppggift 5

a) För en genererande funktion av typen U gäller att

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Vi vill att den nya Hamiltonfunktionen, $\tilde{H}$ ska vara identiskt lika med noll, dvs att

$$H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Utnyttja nu att $q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i}$ och vi får

$$H(-\frac{\partial U}{\partial \underset{\sim}{p_i}}, \underset{\sim}{p}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

vilket är vår sökta Hamilton-Jacobi-ekvation i rörelsemängdsrepresentationen. Detta är en partiell differentialekvation för U med avseende på $\underset{\sim}{p}$ och t.

b) Med den givna Hamiltonfunktionen blir Hamilton-Jacobis ekvation i rörelsemängdsrepresentationen

$$\frac{p^2}{2m} - mg\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Ansätt nu att

$$U(p,t) = U_1(p) + U_2(t)$$

(där beroendet på det konstanta Q ej är explicit angivet). Insatt i ekv. (3) ger detta

$$\underbrace{\frac{p^2}{2m} - mg\frac{\partial U_1}{\partial p}}_{=E} + \underbrace{\frac{\partial U_2}{\partial t}}_{=-E} = 0$$

där vi inser att de första termerna bara beror av p medan den sista termen bara beror av t varför de båda måste vara konstanter och lika (fast med omvänt tecken). Vi får då en ekvation för U_1 och en för U_2,

$$\begin{cases} \frac{p^2}{2m} - mg\frac{\partial U_1}{\partial p} = E \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} = -E. \end{cases}$$

Dessa löses enkelt och vi får

$$\begin{cases} U_1 &= \frac{p^3}{6m^2 g} - \frac{Ep}{mg} + \text{konst.} \\ U_2 &= -Et + \text{konst.} \end{cases}$$

[1] Man kan t.ex. välja alla utom en $\eta_k \equiv 0$. Gör man detta för var en av termerna i summan ser man att uttrycket inom hakparanteser måste vara noll för varje term i summan för sig.

vilket ger vår sökta genererande funktion U,

$$U = \frac{p^3}{6m^2 g} - \frac{Ep}{mg} - Et + \text{konst.} \tag{4}$$

U ska dock vara en funktion av Q, p och t så vår separationskonstant E måste vara en funktion av vårt konstanta Q. Vi väljer att definiera $E = Q$ och låter vidare den godtyckliga konstanten i ekv. (4) vara noll, vilket ger oss

$$U(Q,p,t) = \frac{p^3}{6m^2 g} - \frac{Qp}{mg} - Qt. \tag{5}$$

Vi kan nu ta fram de variabelsamband som ger oss vår kanoniska transformation,

$$\left\{\begin{array}{lcl} q &=& -\frac{\partial U}{\partial p} = -\frac{p^2}{2m^2 g} + \frac{Q}{mg} \\ P &=& -\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{p}{mg} + t \end{array}\right.$$

Den andra av dessa ekvationer ger

$$p = mg\,(P - t) \tag{6}$$

vilket insatt i den första ekvationen ger

$$q = -\frac{g\,(P-t)^2}{2} + \frac{Q}{mg} \tag{7}$$

Hamiltons kanoniska ekvationer för de nya variablerna Q och P är triviala,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{Q} &=& \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} &=& -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} Q &=& \beta = \text{konst.} \\ P &=& \alpha = \text{konst.} \end{array}\right.$$

Insatt i ekv. (6)–(7) ger detta lösningen

$$\left\{\begin{array}{lcl} q(t) &=& \frac{\beta}{mg} - \frac{g(\alpha-t)^2}{2} \\ p(t) &=& mg\,(\alpha - t) \end{array}\right.$$

Begynnelsevillkoret $p(0) = mv_0$ ger $\alpha = v_0/g$ medan $q(0) = 0$ ger $\beta = mv_0^2/2$. Lösningen med de givna begynnelsevillkoren är således

$$\left\{\begin{array}{lcl} q(t) &=& \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g} - t\right)^2 \\ p(t) &=& mg\left(\frac{v_0}{g} - t\right) \end{array}\right.$$