Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

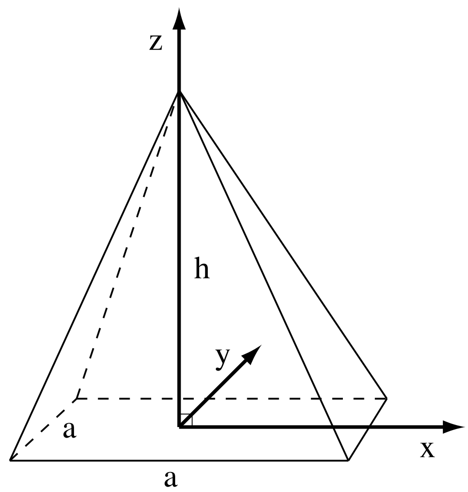
22 augusti 2003

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Vi börjar med att införa ett kartesiskt koordinatsystem med origo i basens centrum och med x- och y-axlarna vinkelräta mot basens sidor (se figur). För att beräkna masscentrums läge måste vi först räkna ut volymen så att vi vet vad pyramidens densitet är. Notera att volymen för ett tunt skikt med höjden dz på höjden z ges av

$$dV = dz\left[\left(1-\frac{z}{h}\right)a\right]^2 = a^2\left(1+\frac{z^2}{h^2}-2\frac{z}{h}\right)dz$$



Volymen blir därför

$$V = \int_0^h a^2\left(1+\frac{z^2}{h^2}-2\frac{z}{h}\right)dz = a^2\left[z+\frac{z^3}{3h^2}-2\frac{z^2}{2h}\right]_0^h = a^2\left[h+\frac{h}{3}-h\right] = \frac{1}{3}a^2h$$

Detta ger oss densiteten

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{a^2h}$$

Massan i ett tunt skikt med höjden dz på höjden z är således

$$d\sigma = \rho dV = \frac{3m}{h}\left(1+\frac{z^2}{h^2}-2\frac{z}{h}\right)dz$$

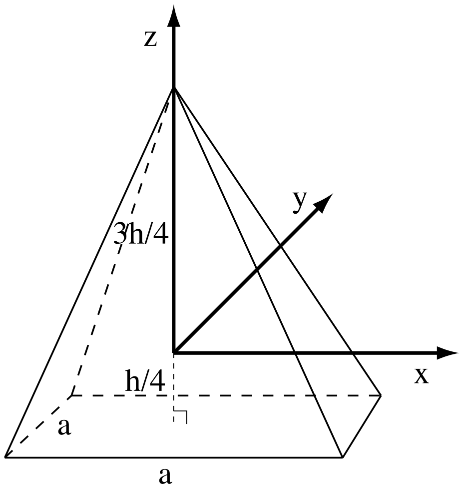
P.g.a. symmetrin måste masscentrum S ligga på z-axeln och vi kan därför beräkna masscentrums z-koordinat som ett viktat medelvärde av z där vikten är massandelen i respektive tunt skikt, d.v.s.

$$z_S = \frac{1}{m}\int_0^h z d\sigma = \frac{1}{m}\frac{3m}{h}\int_0^h\left(z+\frac{z^3}{h^2}-2\frac{z^2}{h}\right)dz = \frac{3}{h}\left[\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4h^2}-2\frac{z^3}{3h}\right]_0^h = \cdots = \frac{h}{4}$$

b) Inför nu ett nytt koordinatsystem med origo i masscentrum S enligt figur. Tröghetstensorns komponenter ges i detta system av

$$I_{ij} = \int\int\int \rho\, dxdydz \left[r_i r_j - \delta_{ij}\mathbf{r}^2\right]$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn till en punkt i pyramiden. Eftersom vi har valt vårt koordinatsystem så att pyramiden är spegelsymmetrisk i både xz- och yz-planet är alla tröghetsprodukter noll. Som exempel, betrakta xz-komponenten av tröghetstensorn,



$$I_{xz} = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \rho\, xz$$

där gränserna för de olika integrationerna explicit har angetts. Integralen i x-led är en integral av en udda funktion över ett symmetriskt intervall och är således noll. Därför är $I_{xz} = 0$. På samma sätt kan man visa att alla övriga tröghetsprodukter är noll.

Tröghetsmomenten I_{xx}, I_{yy} och I_{zz} är däremot inte noll, utan måste beräknas. Låt oss börja med I_{zz},

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \rho \left(x^2+y^2\right) \\
&= \frac{3m}{a^2h} \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \left(x^2+y^2\right) \\
&= \frac{3m}{a^2h} \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{y=\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} \\
&= \cdots \quad = \frac{ma^2}{10}
\end{aligned}$$

På samma sätt kan vi räkna ut tröghetsmomentet I_{xx},

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \rho \left(y^2+z^2\right) \\
&= \frac{3m}{a^2h} \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} dz \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dx \int_{-\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}\right)} dy \left(y^2+z^2\right) \\
&= \cdots \quad = m\left[\frac{a^2}{20} + \frac{3h^2}{80}\right]
\end{aligned}$$

P.g.a. symmetrin är $I_{yy} = I_{xx}$ och vi har således alla tröghetstensorns komponenter beräknade. Tröghetstensorn ges således av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} m\left[\frac{a^2}{20}+\frac{3h^2}{80}\right] & 0 & 0 \\ 0 & m\left[\frac{a^2}{20}+\frac{3h^2}{80}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{10} \end{pmatrix}$$

Uppgift 2

Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\dot{l}^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\alpha^2$$

och den potentiella energin ges av

$$U = -mgl(t)\cos\varphi.$$

Lagrangianen ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\alpha^2 + mgl\cos\varphi.$$

Den kanoniska rörelsemängden är

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

vilket slutligen ger oss Hamiltonianen

$$\begin{aligned} H &= p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{p_\varphi^2}{ml^2} - \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\varphi}{ml^2}\right)^2 - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mlg\cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2(t)} - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mgl(t)\cos\varphi = H(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Vi noterar att Hamiltonianen beror explicit av tiden p.g.a det tidsberoende tvånget (längden på snöret som minskar med tiden).
Energin för systemet ges av

$$E = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2(t)} + \frac{1}{2}m\alpha^2 - mgl(t)\cos\varphi = E(t) \tag{2}$$

Notera att energin $E \neq H$. Jämför vi Ekv. (1) och (2) ser vi att

$$E(t) = H(t) + m\alpha^2$$

Eftersom Hamiltonianen beror explicit av tiden kan den ej vara en rörelsekonstant, vi har att

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$$

Av samma anledning är energin ej heller en rörelsekonstant,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \{H, H + m\alpha^2\} = \frac{\partial E}{\partial t} \neq 0$$

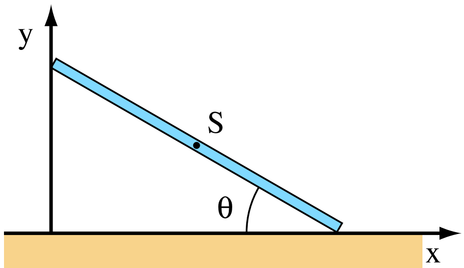
Så, vi har sett att Hamiltonianen ej är lika med den totala energin och vi har också sett att varken Hamiltonianen eller energin är rörelsekonstanter. Om våra tvångsvillkor ej beror på tiden och vi skriver Lagrangianen på dess naturliga form $L = T - U$ så ges Hamiltonianen av $H = T + U$, men i detta fall beror tvånget på tiden och då gäller inte detta. Vi utbyter också energi med systemet genom den externa kraften som drar i snöret och därför är energin ej bevarad.

Uppgift 3

Vi börjar med att konstatera att problemet har en frihetsgrad eftersom rörelsen antas ske i figurens plan och p.g.a. symmetrin måste då gångjärnets rörelse ske helt vertikalt. Låt vinkeln θ vara vinkeln de respektive stavarna gör med underlaget (dvs den vinkel som är β vid $t = 0$ enligt figuren). Vi kan antingen tänka oss att använda vinkeln θ eller gångjärnets höjd $y = l\sin\theta$ som generaliserad koordinat. Vi väljer här att använda θ som generaliserad koordinat (vilket i detta fall visar sig ge enklare rörelseekvationer).

a) Stavarnas rörelseenergi består av två delar, dels masscentrums rörelseenergi för de två stavarna och dels rotationsenergin runt respektive masscentrum. Vi väljer att räkna ut den kinetiska energin för en av stavarna och multiplicerar sedan detta uttryck med 2 för att få den totala kinetiska energin.

Betrakta den högra staven. Inför ett kartesiskt koordinatssystem enligt figur med stavens masscentrum i S. Koordinaterna för masscentrum ges av



$$\begin{cases} x_S &= \frac{l}{2}\cos\theta \\ y_S &= \frac{l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Masscentrums hastighet ges då av

$$\begin{cases} \dot{x}_S &= -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} \\ \dot{y}_S &= \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

vilket ger oss translationsenergin för den högra stavens masscentrum

$$T_S = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2\right) = \frac{1}{8}ml^2\left(\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2$$

Rotationsenergin för rotationen runt masscentrum ges av

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

där tröghetsmomentet för en tunn homogen stav är $I = \frac{1}{12}ml^2$ och vinkelhastigheten ges i detta fall av $\omega = \dot{\theta}$. Detta ger oss

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta}^2$$

Den kinetiska energin för den högra staven blir således

$$T_{\text{högra staven}} = T_S + T_{\text{rot}} = ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$$

Slutligen blir då den totala kinetiska energin för båda stavarna

$$T = 2T_{\text{högra staven}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$

b) Den potentiella energin ges av

$$U = 2mgy_S = 2mg\frac{1}{2}l\sin\theta = mgl\sin\theta$$

Lagrangianen ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$$

Derivatorna av Lagrangianen är

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial\theta} &= -mgl\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta} \end{cases}$$

vilket insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ger oss rörelseekvationerna

$$\frac{2}{3}ml^2\ddot{\theta} + mgl\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2l\ddot{\theta} + 3g\cos\theta = 0$$

Multiplicera denna ekvation med $\dot{\theta}$ så kan vi integrera en gång med avseende på t,

$$\begin{aligned} &2l\ddot{\theta}\dot{\theta} + 3g\cos\theta\dot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow l\dot{\theta}^2 + 3g\sin\theta = A \end{aligned}$$

Konstanten A bestäms ur begynnelsevillkoren $\theta(0) = \beta$ och $\dot{\theta}(0) = 0$, vilket ger $A = 3g\sin\beta$, dvs

$$\dot{\theta} = \overset{(+)}{-}\sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\beta - \sin\theta)} \tag{3}$$

där vi väljer den negativa lösningen eftersom den ger korrekt tecken på $\dot{\theta}$ i vårt fall.

Vi söker nu hastigheten hos gångjärnet när den slår ner i det horisontella planet. Hastigheten hos gångjärnet ges av

$$\dot{y} = l\cos\theta\dot{\theta}$$

Sätter vi in ekv. (3) (med $\theta = 0$ vid nedslaget) får vi då slutligen gångjärnets hastighet när det slår i planet

$$\dot{y} = -l\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\beta} = -\sqrt{3gl\sin\beta}$$

Uppgift 4

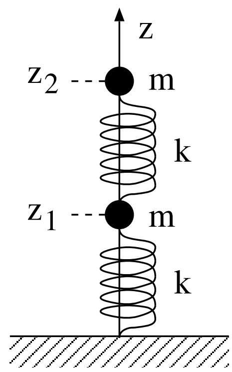
a) Se Scheck, avsnitt 2.23 samt föreläsningsanteckningarna.

b) Detta kan göras på flera sätt. Exempelvis kan man explicit verifiera att Hamiltons ekvationer är på samma form i de nya som i de gamla variablerna. Ett annat sätt är att försöka hitta en genererande funktion som genererar transformationen. Om en sådan finns, så är transformationen kanonisk. Ytterligare ett sätt är att verifiera om Poissonparenteserna för de nya variablerna (Q, P) uppfyller

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \{Q_i, Q_j\} & = & 0 & ; \quad \forall\, i,j \\ \{P_i, P_j\} & = & 0 & ; \quad \forall\, i,j \\ \{Q_i, P_j\} & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; \ \forall\, i \neq j \\ 1 & ; \ \forall\, i = j \end{array} \right. & \end{array} \right.$$

Om de gör det så är transformationen kanonisk.

Uppgift 5



Systemet har två frihetsgrader och vi inför de generaliserade koordinaterna z_1 och z_2 för de två massornas lägen (se figur). Detta problem kan lösas på flera sätt och vi väljer här att ta fram rörelseekvationerna med hjälp av Lagranges ekvationer och sätta in en ansats till lösning (med hjälp av ledningen) för att lösa ut de möjliga vinkelfrekvenserna.
Den kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2$$

och den potentiella energin är

$$U = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2.$$

Lagrangefunktionen ges då av

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2 - mgz_1 - mgz_2 - \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 - \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2$$

och dess derivator är

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z_1} &= -mg - k(z_1 - a) + k(z_2 - z_1 - a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} &= m\dot{z}_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z_2} &= -mg - k(z_2 - z_1 - a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} &= m\dot{z}_2 \end{cases} .$$

Detta insatt i Lagranges ekvationer ger

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2k}{m}z_1 + \frac{k}{m}z_2 - g \tag{4}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2 - g + \frac{ka}{m}. \tag{5}$$

Detta system av andra ordningens differentialekvationer kan lösas på flera sätt. Ett sätt är att betrakta ekv. (4)+B(5) och bestämma B så att vi får *en* andra ordningens differentialekvation för $z_1 + B \cdot z_2$ som sedan enkelt löses och ger de sökta vinkelfrekvenserna[1]. Ett annat sätt är att enligt ledningen ansätta att lösningen till den homogena ekvationen,

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2k}{m}z_1 + \frac{k}{m}z_2 \tag{6}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2, \tag{7}$$

är given på formen

$$\begin{cases} z_1 &= A\cos(\omega t + \delta) \\ z_2 &= B\cos(\omega t + \delta) \end{cases} \tag{8}$$

Denna ansats insatt i ekv. (6)-(7), ger

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right) A - \frac{k}{m}B\right] = 0 \\ \left[-\frac{k}{m}A + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) B\right] = 0 \end{cases} .$$

[1] Vi får två möjliga val av B som vardera ger en av de sökta vinkelfrekvenserna.

För att detta ekvationssystem för A och B ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten för koefficientmatrisen vara noll, d v s

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0.$$

Löser vi ut ω ur denna ekvation erhåller vi de sökta vinkelfrekvenserna[2]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}$$

[2]Om vi skulle vara intresserade av de fullständiga lösningarna sätter vi in våra två ω i ekv. (6) eller (7) för att erhålla ett samband mellan A och B. På så vis får vi en lösning för varje ω och en linjärkombination av dessa två lösningar tillsammans med partikulärlösningen utgör sedan den fullständiga lösningen.