Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

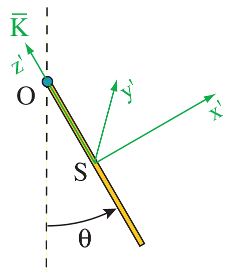
2 juni 2003

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Den kinetiska energin består av dels en translationsenergi för masscentrum och dels en rotationsenergi för rotationen kring masscentrum,

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{I}\cdot\omega$$



Låt oss beräkna den sista termen, rotationsenergin i ett kroppsfixt system $\bar{K}$ med origo i masscentrum enligt figur. Tröghetstensorn i detta system ges av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi behöver också vinkelhastighetsvektorn ω uttryckt i $\bar{K}$-systemet. Denna får bidrag från två håll, dels rotationen kring vertikalaxeln och dels θ-rotationen,

$$\omega = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\hat{\mathbf{x}}' + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}'\right) - \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}}'$$

Rotationsenergin för rotationen kring masscentrum är således

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{I}\cdot\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{24}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

Den totala kinetiska energin blir då

$$T = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{6}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

b) För att ta fram rörelsen kan vi använda oss av Lagranges ekvationer. Lagrangefunktionen ges av

$$L = T - U = \frac{1}{6}ml^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

De partiella derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, ger detta oss rörelseekvationerna,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Den andra av dessa ekvationer kan vi integrera på en gång och vi får då

$$\sin^2\theta\dot{\varphi} = A = \text{konst.} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{A}{\sin^2\theta}$$

Konstanten A kan vi bestämma från begynnelsevillkoren $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ och $\theta(0) = \pi/2$, vilket ger $A = \omega_0$. Det efterfrågade sambandet $\dot{\varphi}$ som funktion av θ är således

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\sin^2\theta} \tag{2}$$

Vi är också intresserade av vändläget för θ-rörelsen och kan antingen utgå från energins bevarande eller den första av rörelseekvationerna, Ekv. (1). Låt oss utgå från den första rörelseekvationen. Med Ekv. (2) kan denna skrivas

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{3}ml^2\omega_0^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0$$

Multiplicera denna ekvation med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden så erhåller vi

$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = B = \text{konst.}$$

Integrationskonstanten B kan bestämmas från begynnelsevillkoren $\theta(0) = \pi/2$ och $\dot{\theta}(0) = 0$ vilket ger $B = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$. Vi är nu redo att ta fram vändpunkten för θ-rörelsen och kan konstatera att vändpunkterna definieras av $\dot{\theta} = 0$, vilket insatt i ekvationerna ovan ger

$$\frac{1}{6}ml^2\omega_0^2\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$$

Denna ekvation kan skrivas om som

$$ml\cos\theta\left[l\omega_0^2\cos\theta - 3g + 3g\cos^2\theta\right] = 0$$

Denna ekvation har två lösningar, antingen att $\cos\theta = 0$, vilket ger den övre vändpunkten $\theta = \pi/2$, d.v.s. samma som vårt begynnelsevillkor. Den andra lösningen erhålles då uttrycket inom hakparenteser är noll, d.v.s. då

$$\cos^2\theta + \frac{l\omega_0^2}{3g}\cos\theta - 1 = 0$$

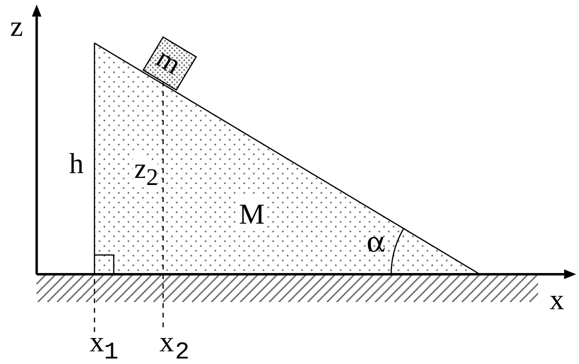
Denna andragradsekvation i $\cos\theta$ löses enkelt och vi får lösningen

$$\cos\theta = -\frac{l\omega_0^2}{6g} \overset{+}{\scriptstyle(-)} \sqrt{1 + \frac{l^2\omega_0^4}{36g}}$$

där endast lösningen med + framför roten är fysikalisk (eftersom $\cos\theta \in [-1, 1]$).

Uppgift 2

a) Vi kan konstatera att problemet har två frihetsgrader, kilens läge och massan ms läge. Vi inför generaliserade koordinater enligt vidstående figur, där x_1 är kilens läge och x_2 är massan ms läge längs med x-axeln.
För att förenkla beräkningarna inför vi z_2 som är massan ms läge längs med den vertikala z-axeln (alternativt skulle vi kunna välja z_2 som generaliserad koordinat istället för x_2). Geometrin i problemet ger att



$$z_2 = h - (x_2 - x_1)\tan\alpha. \tag{3}$$

För att få fram den kinetiska energin noterar vi att massan ms hastighet ges av

$$\mathbf{v}_2 = \dot{x}_2\hat{\mathbf{x}} + \dot{z}_2\hat{\mathbf{z}} = \dot{x}_2\hat{\mathbf{x}} - (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan\alpha\hat{\mathbf{z}}$$

Den kinetiska energin ges således av

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\tan^2\alpha\right] \tag{4}$$

och den potentiella energin ges av

$$U = mgz_2 = mg\left[h - (x_2 - x_1)\tan\alpha\right]. \tag{5}$$

Detta ger oss Lagrangianen

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\tan^2\alpha\right] - mg\left[h - (x_2 - x_1)\tan\alpha\right]. \tag{6}$$

Derivatorna av Lagrangianen är således

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -mg\tan\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= M\dot{x}_1 - m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_2} &= mg\tan\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m\dot{x}_2 + m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\alpha) \end{cases} .$$

Insatt i Lagranges ekvationer ger detta våra rörelseekvationer

$$M\ddot{x}_1 - m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha = 0 \tag{7}$$
$$m\ddot{x}_2 + m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\alpha - mg\tan\alpha = 0 \tag{8}$$

b) Ekv. (7)+(8) ger

$$M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

vilket kan integreras på en gång till

$$Mx_1 + mx_2 = At + B$$

Begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ger att $A = B = 0$, vilket ger

$$Mx_1 = -mx_2. \tag{9}$$

Ekv. (7)-(8) ger efter integration

$$Mx_1 - mx_2 - 2m(x_2 - x_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha t^2 = Ct + D.$$

Begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ger att $C = D = 0$, vilket ger

$$Mx_1 - mx_2 - 2m(x_2 - x_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha t^2 = 0.$$

Utnyttja nu ekv. (9) för att lösa ut x_1 och x_2,

$$\begin{cases} x_1(t) &= -Ft^2 \\ x_2(t) &= \frac{M}{m}Ft^2 \end{cases} \quad ; \quad F = \frac{mg\tan\alpha}{2M(1+\tan^2\alpha) + 2m\tan^2\alpha} \tag{10}$$

Ekv. (3) ger nu att

$$z_2 = h - (x_2 - x_1)\tan\alpha = h - \left(\frac{M}{m} + 1\right)\tan\alpha F t^2$$

och $z_2 = 0$ inträffar då

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{hm}{F(m+M)\tan\alpha}} = \sqrt{\frac{2h\left[M(1+\tan^2\alpha) + m\tan^2\alpha\right]}{g(m+M)\tan^2\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}\left[1 + \frac{M}{(m+M)\tan^2\alpha}\right]} \end{aligned} \tag{11}$$

d v s detta är den tid det tar innan massan m slår i det horisontella underlaget. Vid fritt fall skulle tiden istället ha varit

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{12}$$

Vi ser att den första termen under rotuttrycket i ekv. (11) är samma som för fritt fall och att den andra termen således är korrektionen p g a kilen. Vi ser också att om $\alpha \to \pi/2$, så går den andra termen mot noll och vi återfår uttrycket för fritt fall, vilket verkar rimligt.

Uppgift 3

Låt oss välja θ_1 och θ_2 som generaliserade koordinater enligt figuren och lös problemet med hjälp av Lagranges ekvationer. Potentialen ges av

$$U = -mgl\cos\theta_1 - mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Den kinetiska energin för den övre massan är given av

$$T_1 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

För den undre massan kan vi sätta upp ortsvektorn från den fixa upphängningspunkten som

$$\mathbf{r}_2 = (l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2)\hat{\mathbf{x}} - (l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\hat{\mathbf{y}}$$

där $\hat{\mathbf{x}}$ ligger i horisontalplanet och $\hat{\mathbf{y}}$ i vertikalplanet. Detta ger oss hastighetsvektorn

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = l(\cos\theta_1\dot{\theta}_1 + \cos\theta_2\dot{\theta}_2)\hat{\mathbf{x}} + l(\sin\theta_1\dot{\theta}_1 + \sin\theta_2\dot{\theta}_2)\hat{\mathbf{y}}$$

Hastigheten i kvadrat för den undre massan är således

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = l^2\Big[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\big(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\cos(\theta_1-\theta_2)}\big)\Big]$$

Detta ger oss den totala kinetiska energin

$$T = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

Lagrangefunktionen ges då slutligen av

$$L = T - U = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

De partiella derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl\sin\theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= 2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl\sin\theta_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, ger detta oss rörelseekvationerna,

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + ml^2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) + 2mgl\sin\theta_1 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - ml^2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + mgl\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Antag nu att vi har små utslagsvinklar. Vi kan då Taylorutveckla rörelseekvationerna och bara behålla termer linjära i vinklar och tidsderivator av dessa. Vi får då

$$\begin{cases} ml^2\left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + 2mgl\theta_1 = 0 \\ ml^2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + mgl\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Ansätt nu att lösningarna är på formen

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

och sätt in detta i våra lineariserade rörelseekvationer (14). Detta ger oss följande ekvation för koefficienterna A_1 och A_2

$$\begin{pmatrix} 2m(gl - l^2\omega^2) & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & m(gl - l^2\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

För att denna ekvation ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten för koefficientmatrisen vara noll, d.v.s.

$$2m^2(gl - l^2\omega^2)^2 - m^2l^4\omega^4 = 0$$

Detta är en andragradsekvation för ω^2, med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$$

Våra sökta vinkelfrekvenser är således

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}$$

Uppgift 4

a) Noethers teorem ser ut som följer:

Om Lagrangefunktionen $L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$ beskriver ett autonomt system som är invariant under transformationen $\underset{\sim}{q} \to \underset{\sim}{h}^s(\underset{\sim}{q})$ där s är en reell kontinuerlig parameter sådan att $\underset{\sim}{h}^{s=0}(\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q}$ är identitetstransformationen så är

$$I(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} h_i^s(\underset{\sim}{q}) \Bigg|_{s=0}$$

en rörelsekonstant.

och bevisas t.ex. på följande vis:

Låt $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\varphi}$ vara en lösning till Lagranges ekvationer. Eftersom systemet är invariant under transformationen $\underset{\sim}{h}^s$ är

$$\underset{\sim}{q}(s,t) = \phi(s,t) = \underset{\sim}{h}^s(\underset{\sim}{\varphi}(t))$$

också en lösning till Lagranges ekvationer,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) \tag{15}$$

Vidare är L invariant under transformationen, d.v.s.

$$0 = \frac{d}{ds} L(\underset{\sim}{\phi}(s,t), \dot{\underset{\sim}{\phi}}(s,t)) = \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{\phi}_i}{ds}\right] \tag{16}$$

Använd nu Ekv. (15) för att byta ut $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ i Ekv. (16) samt byt ordning på deriveringarna i den sista termen så erhåller vi

$$\sum_{i=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{d\phi_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi_i}{ds}\right)\right] = 0$$

Detta måste speciellt gälla då $s = 0$ och vi erhåller då slutligen (med $d\phi_i/ds = dh_i^s/ds$)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{dh_i^s}{ds}\right)\Bigg|_{s=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} I = 0$$

b) Lagrangefunktionen är invariant under rotation kring en godtycklig axel. Låt oss lägga vårt koordinatsystem så att denna godtyckliga axel är z-axeln. Vi kan då beskriva transformationen som

$$h^s: \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \to \mathbf{r}' = (x', y', z') = (x\cos s + y\sin s, -x\sin s + y\cos s, z)$$

Vi får då

$$\left.\frac{d}{ds}h^s\right|_{s=0} = (y, -x, 0) = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}$$

Vår rörelsekonstant ges då enligt Noethers teorem av

$$I = \left.\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{ds}h_i^s\right|_{s=0} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}} = \{\text{vektoranalys}\} = \hat{\mathbf{z}} \cdot (m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L} = -L_z$$

d.v.s. invarians under rotation kring z-axeln betyder att z-komponenten av rörelsemängdsmomentet $\mathbf{L}$ är bevarad. Eftersom vi nu har invarians för rotation runt alla axlar, måste alla komponenter av $\mathbf{L}$ vara bevarade, d.v.s. $\mathbf{L}$ är en rörelsekonstant.

Uppgift 5

a) Hamiltonfunktionen för detta system är

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy$$

Insatt i Hamilton-Jacobis ekvation erhåller vi då följande ekvation för vår sökta verkansfunktion S^*:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial y}\right)^2 + mgy + \frac{\partial S^*}{\partial t} = 0 \tag{17}$$

Ansätt nu att S^* är separabel, d.v.s. att

$$S^*(x, y, \underset{\sim}{\alpha}, t) = S_1^*(x, \underset{\sim}{\alpha}) + S_2^*(y, \underset{\sim}{\alpha}) - Et$$

där vi kan välja vår separationskonstant $E = \alpha_1$ där α_1 är ett av våra två nya konstanta rörelsemängder $\underset{\sim}{P}$. Insatt i Ekv. (17) får vi då

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x}\right)^2}_{\frac{1}{2m}\alpha_2^2} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial y}\right)^2 + mgy}_{\alpha_1 - \frac{1}{2m}\alpha_2^2} = \alpha_1$$

Eftersom den första termen bara beror av x och den andra bara av y måste de vara konstanter och vi väljer den första till $\alpha_2^2/2m$. Den andra termen måste då vara $\alpha_1 - \alpha_2^2/2m$ för att ekvationen ska vara uppfylld. Vi får då följande ekvationer för S_1^* och S_2^*

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x}\right)^2 = \alpha_2^2 \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial y}\right)^2 + mgy = \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2m} \end{cases}$$

Dessa ekvationer integreras enkelt till

$$\begin{cases} S_1^* &= \alpha_2 x + \text{konst.} \\ S_2^* &= -\frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy\right)^{\frac{3}{2}} + \text{konst.} \end{cases}$$

vilket ger oss den sökta verkansfunktionen

$$S^*(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x - \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy\right)^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 t \tag{18}$$

där den godtyckliga additiva konstanten har satts till noll.

b) Med den genererande funktionen S^* i Ekv. (18) kan vi generera en kanonisk transformation till nya variabler $\{\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{\alpha}\}$ med den nya Hamiltonfunktionen $\tilde{H} = 0$. Från variabelsambanden för denna typ av genererande funktion erhåller vi

$$\begin{cases} Q_1 &= \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy} - t \\ Q_2 &= \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_2} = x + \frac{\alpha_2}{m^2 g}\sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - 2m^2 gy} \end{cases}$$

Ur dessa kan vi lösa ut x och y som funktioner av Q_1 och Q_2 (samt $\underset{\sim}{\alpha}$):

$$x = Q_2 + \frac{\alpha_2}{m}(t + Q_1) \tag{19}$$

$$y = \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{\alpha_2^2}{2m^2 g} - \frac{g}{2}(t + Q_1)^2 \tag{20}$$

Eftersom $\tilde{H} = 0$ vet vi från Hamiltons kanoniska ekvationer i de nya variablerna att både $\underset{\sim}{Q}$ och $\underset{\sim}{P}$ är konstanter. Dessa får vi bestämma från våra begynnelsevillkor: $\dot{x}(0) = v_0$ ger i Ekv. (19) att $\alpha_2 = v_0$, $\dot{y}(0) = 0$ ger i Ekv. (20) att $Q_1 = 0$, $x(0) = 0$ ger i Ekv. (19) att $Q_2 = 0$ samt slutligen $y(0) = h$ ger i Ekv. (20) att $\frac{\alpha_1}{mg} - \frac{v_0^2}{2g} = h$. Vår lösning är således

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

vilket är precis vad vi skulle få med Newtons andra lag för detta enkla problem.