Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

23 augusti 2002

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Pendeln kan röra sig i två dimensioner, dels rör sig upphängningspunkten A längs med x-axeln och dels pendlar själva pendeln i vertikalplanet. Upphängningspunktens rörelse är dock given och kan därför betraktas som ett externt tvång. Vi har därför en frihetsgrad och väljer utslagsvinkeln θ som vår generaliserade koordinat. För upphängningspunkten As rörelse gäller att

$$\ddot{x} = g \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = gt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}gt^2$$

där integrationskonstanterna har valts till 0.

Massan ms hastighet kan skrivas som

$$\mathbf{v} = \left[\dot{x} - l\dot{\theta}\cos\theta\right]\hat{\mathbf{x}} + l\dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{z}}$$

vilket ger oss den kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]$$

Den potentiella energin kan skrivas

$$U = -mgl\cos\theta$$

Om vi nu utnyttjar att $\dot{x} = gt$ får vi Lagrangianen

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left[g^2t^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2lgt\dot{\theta}\cos\theta\right] + mgl\cos\theta$$

Lagrangianens derivator ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\dot{\theta}t\sin\theta - mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - mglt\cos\theta \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer ger detta oss rörelseekvationen

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \tfrac{\partial L}{\partial \theta} &= ml^2\ddot{\theta} - mgl\cos\theta + mglt\dot{\theta}\sin\theta - mgl\dot{\theta}t\sin\theta + mgl\sin\theta \\ &\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \tfrac{g}{l}\left[\cos\theta - \sin\theta\right] \end{aligned} \tag{1}$$

vilket är vår sökta rörelseekvation.

b) Jämviktsläget får vi genom att sätta $\ddot{\theta} = 0$. Vår rörelseekvation (1) ger oss då följande villkor för jämviktsläget θ_0,

$$\cos\theta_0 = \sin\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

c) Vi vill nu skriva om vår rörelseekvation så att den blir lättare att lösa för små utslag kring θ_0. Vi gör enklast detta genom att använda följande trigonometriska formel,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Välj det undre tecknet, $\alpha = \theta$ och $\beta = \pi/4$ så får vi

$$\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) = \sin\theta\cos\tfrac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\theta - \cos\theta\right)$$
$$\Rightarrow \quad \cos\theta - \sin\theta = -\sqrt{2}\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Insatt i rörelseekvationen (1) får vi

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sqrt{2}g}{l}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Inför nu $\theta' = \theta - \pi/4$ som är utslaget från jämviktsläget. Vi får då

$$\ddot{\theta'} = -\frac{\sqrt{2}g}{l}\sin\theta'$$

vilket är vår vanliga rörelseekvation för en harmonisk oscillator. För små utslag kan vi approximera $\sin\theta' \simeq \theta'$ och får då

$$\ddot{\theta'} = -\frac{\sqrt{2}g}{l}\theta'$$

vilken har cos- och sin-lösningar som kan skrivas på formen

$$\theta'(t) = B\cos\left(\omega_0 t - \beta\right) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{l}}$$

där B och β bestäms ur begynnelsevillkoren. Uttryckt i vår ursprungliga variabel θ är lösningen given av

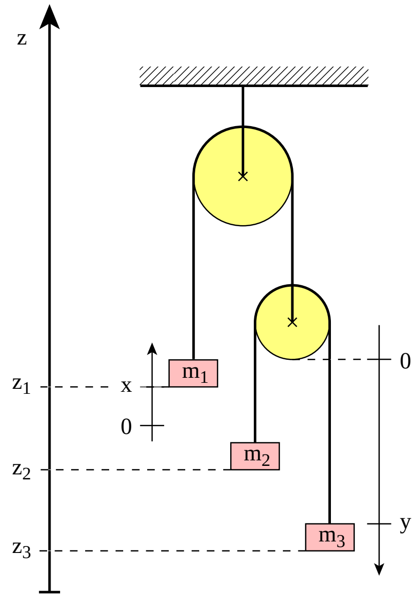
$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} + B\cos\left(\omega_0 t - \beta\right) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{l}}$$

Motsvarande pendel med upphängningspunkten A fix skulle ha lösningen

$$\theta(t) = B'\cos\left(\omega_0' t - \beta'\right) \quad ; \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Vi kan notera att vår pendel med en accelererande upphängningspunkt beter sig precis som en vanlig pendel med fix upphängningspunkt skulle göra om tyngdaccelerationen var $\sqrt{2}g$ och riktad i $-\left(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}\right)/\sqrt{2}$-riktningen. Detta är ett exempel på att vi ej kan skilja på ett accelererat system och ett som befinner sig i ett gravitationsfält.

Uppgift 2



Vi inser att problemet har två frihetsgrader och vi väljer x och y som generaliserade koordinater enligt figur. x är massa 1s läge i förhållande till ursprungsläget. y är massa 3s läge i förhållande till den högra trissan. Detta innebär att vi kan skriva ändringen av höjden för de tre massorna som

$$\begin{cases} z_1 &= x \\ z_2 &= y - x \\ z_3 &= -y - x \end{cases} \tag{2}$$

Detta ger den kinetiska energin

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{z}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

Den potentiella energin ges av

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + m_3 g z_3 = (m_1 - m_2 - m_3)gx + (m_2 - m_3)gy$$

vilket ger oss Lagrangianen, $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}\dot{y} - (m_1 - m_2 - m_3)gx - (m_2 - m_3)gy \tag{3}$$

Derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= -(m_1 - m_2 - m_3)g \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -(m_2 - m_3)g \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2 + m_3)\dot{x} + (m_3 - m_2)\dot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (m_2 + m_3)\dot{y} + (m_3 - m_2)\dot{x} \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger oss då rörelseekvationerna

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + (m_3 - m_2)\ddot{y} + (m_1 - m_2 - m_3)g = 0 \tag{4}$$
$$(m_2 + m_3)\ddot{y} + (m_3 - m_2)\ddot{x} + (m_2 - m_3)g = 0 \tag{5}$$

Genom substitution kan vi lösa ut $\ddot{x}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5). Vi erhåller då

$$[m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3]\,\ddot{y} + 2m_1(m_2 - m_3)g = 0$$

På samma sätt kan vi lösa ut $\ddot{y}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5) för att erhålla

$$[m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3]\,\ddot{x} + [m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3]\,g = 0$$

Båda dessa ekvationer integreras enkelt två gånger för att ge lösningen

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{[m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3]\,g}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + At + B \\ y(t) &= -\frac{2m_1(m_2 - m_3)g}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + Ct + D \end{aligned}$$

där A, B, C och D är konstanter vilka bestäms av begynnelsevillkoren. Insatt i Ekv. (2) ger dessa ekvationer oss rörelsen för de tre massorna.

Uppgift 3
Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 4

a) När det externa vridmomentet $\bar{\mathbf{N}} = 0$ blir Eulers dynamiska ekvationer

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_x &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \bar{\omega}_y \bar{\omega}_z \\ \dot{\bar{\omega}}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \bar{\omega}_z \bar{\omega}_x \\ \dot{\bar{\omega}}_z &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y \end{cases} \tag{6}$$

Vi vill nu visa att om vinkelfrekvensvektorn är given av $\boldsymbol{\omega}_a = (\omega_0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_b = (0, \omega_0, 0)$ eller $\boldsymbol{\omega}_c = (0, 0, \omega_0)$ så kommer den att fortsätta vara det. Om vi sätter in $\boldsymbol{\omega}_a$ i högerledet i Ekv. (6) får vi

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_x &= 0 \\ \dot{\bar{\omega}}_y &= 0 \\ \dot{\bar{\omega}}_z &= 0 \end{cases}$$

d v s vinkelhastighetsvektorn kommer ej att ändras. Samma sak erhålles om $\boldsymbol{\omega}_b$ eller $\boldsymbol{\omega}_c$ sätts in i Ekv. (6) och vi har därmed visat att om rotationen sker kring x-, y- eller z-axeln så kommer den att fortsätta att göra det.

b) Vi antar nu att vinkelhastighetsvektorn ges av $\boldsymbol{\omega}_a$, $\boldsymbol{\omega}_b$ eller $\boldsymbol{\omega}_c$, men lägger på en liten störning och ser om störningen växer med tiden eller ej. Vi börjar med rotation kring x-axeln, d v s med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_a$ och lägger på en liten störning. Vi antar att den sökta vinkelhastighetsvektorn kan skrivas

$$\boldsymbol{\omega}'_a(t) = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\varepsilon}(t) = (\omega_0 + \varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \varepsilon_z(t))$$

och söker $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Vidare antar vi att störningen är liten, d v s att $|\boldsymbol{\varepsilon}| \ll |\boldsymbol{\omega}_a|$. Vi sätter nu in denna ansats i Ekv. (6) och erhåller

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \varepsilon_y \varepsilon_z \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \varepsilon_z (\varepsilon_x + \omega_0) \simeq \frac{I_3 - I_1}{I_2} \varepsilon_z \omega_0 \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \varepsilon_y (\varepsilon_x + \omega_0) \simeq \frac{I_1 - I_2}{I_3} \varepsilon_y \omega_0 \end{cases} \tag{7}$$

där vi i sista ledet har försummat termer av ε relativt ω_0. Vi kan nu titta närmare på de ekvationer som bestämmer hur störningen i y- och z-led ser ut. Derivering och substitution av de två sista ekvationerna ger

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_0^2 \varepsilon_y \\ \ddot{\varepsilon}_z &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_0^2 \varepsilon_z \end{cases} \tag{8}$$

Eftersom $I_3 > I_2 > I_1$ ser vi att koefficienterna framför termerna i högerleden är negativa. Vi kommer således att erhålla sin- och cos-lösningar varför störningen ej kommer att växa med tiden. Denna rotation är således stabil[1].

[1] Den första ekvationen i (7) är ej lika lätt att tolka, men det behöver vi inte göra heller. Vi vet att rörelsemängdsmomentet är bevarat. I vårt kroppsfixa roterande system innebär det att $|\mathbf{L}| = \sqrt{I_1^2\omega_x^2 + I_2^2\omega_y^2 + I_3^2\omega_Z^2}$ = konstant. Om ω_y och ω_z ej växer i storlek kommer därför ω_x att vara i stort sett oförändrad. Det räcker således med att betrakta störningen i y- och z-led som vi har gjort ovan för att se om störningen växer eller inte.

Vi har nu rotationer kring de andra två axlarna kvar att analysera och vi kan gå igenom samma maskineri för dem, men vi kan ta en genväg och erhålla rörelseekvationerna för rotation kring y-axeln med en liten störning genom cyklisk permutation av indexen ($1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \cdots$ samt $x \to y \to z \to x \to \cdots$) i Ekv. (8),

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_z &= \frac{I_1-I_2}{I_3}\frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_0^2\varepsilon_z \\ \ddot{\varepsilon}_x &= \frac{I_2-I_3}{I_1}\frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_0^2\varepsilon_x \end{cases} \tag{9}$$

Vi ser att koefficienterna framför termerna i högerleden nu är positiva. Vi kommer således att erhålla exponentiellt växande[2] lösningar. Rotationer kring y-axeln är således ej stabila utan en liten störning kommer att växa exponentiellt.

För den sista rotationen gör vi en cyklisk permutation till och får rörelseekvationerna

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_x &= \frac{I_2-I_3}{I_1}\frac{I_3-I_1}{I_2}\omega_0^2\varepsilon_x \\ \ddot{\varepsilon}_y &= \frac{I_3-I_1}{I_2}\frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_0^2\varepsilon_y \end{cases} \tag{10}$$

Koefficienterna framför högerleden är nu återigen negativa och vi får cos- och sin-lösningar. Rotationer kring z-axeln är såldes stabila. Vi har således visat att rotationer kring de två axlarna med minst respektive störst tröghetsmoment är stabila för små störningar medan rotationer kring axeln med det mellersta tröghetsmomentet är labila.

Uppgift 5

a) Hamiltonfunktionen ges av

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$$

och dess tidsderivata är

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{dL}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} \dot{q}_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k - \sum_k p_k \ddot{q}_k \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k p_k\right) = 0
\end{aligned}$$

Hamiltonfunktionen H är därmed bevarad när vi inte har något explicit tidsberoende.

[2] Vi erhåller också exponentiellt avtagande lösningar, men det räcker med att konstatera att vi har exponentiellt växande lösningar. En godtycklig störning kommer då att växa.

b) Vi har nu att Lagrangefunktionen är given av

$$L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) = T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}}) - U(\underset{\sim}{q})$$

Hamiltonfunktionen ges nu av

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{p_k}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} - T + U = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - T + U$$

Eftersom U ej beror av $\underset{\sim}{\dot{q}}$ kan vi ersätta $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ med $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ och erhåller då

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - T + U \tag{11}$$

Vi utnyttjar nu ledningen och visar Eulers teorem för vår kinetiska energi. T ges av

$$T = \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} c_{jk}(\underset{\sim}{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Eftersom T på denna form är en homogen funktion av grad 2 i $\underset{\sim}{\dot{q}}$ gäller att

$$T(\underset{\sim}{q}, \lambda \dot{q}_1, \lambda \dot{q}_2, \ldots, \lambda \dot{q}_f) = \lambda^2 T(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$$

Derivera med avseende på λ och sätt sedan $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{d\lambda} T(\underset{\sim}{q}, \lambda \dot{q}_1, \lambda \dot{q}_2, \ldots, \lambda \dot{q}_f)\right]_{\lambda=1} &= \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\lambda^2 T\right)\right]_{\lambda=1} \\
\left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \lambda \dot{q}_k} \frac{d\lambda \dot{q}_k}{d\lambda}\right]_{\lambda=1} &= [2\lambda T]_{\lambda=1} \\
\left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \lambda \dot{q}_k} \dot{q}_k\right]_{\lambda=1} &= [2\lambda T]_{\lambda=1} \\
\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k &= 2T
\end{aligned}$$

Därmed är Eulers teorem bevisat. Insatt i Ekv. (11) erhåller vi slutligen

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - T + U = 2T - T + U = T + U = E$$

vilket är vad vi skulle visa. Enligt a) är H och i således även E en rörelsekonstant.