Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel.: 08-55 37 87 26
E-post: edsjo@physto.se

Lösningar till

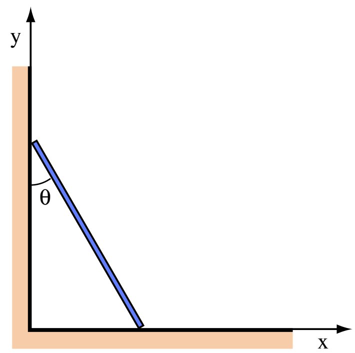
Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

1 juni 2002

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Problemet har en frihetsgrad och vi väljer vinkeln θ mellan stegen och väggen som generaliserad koordinat. Inför också kartesiska koordinater x och y för stegens masscentrum. Följande relation mellan θ och våra kartesiska koordinater gäller:



$$\begin{cases} x = \frac{l}{2}\sin\theta \\ y = \frac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

Vi kan då skriva upp den kinetiska energin för stegen som

$$T = T_S + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}\underbrace{I_z}_{\frac{ml^2}{12}}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

vilket ger oss vår Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{2}\cos\theta$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen blir

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{mgl}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$, ger oss nu rörelseekvationerna,

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \tag{1}$$

b) Stegen förlorar kontakten med väggen då accelerationen i x-led är noll ty då är kraften från väggen noll enligt Newtons andra lag. Accelerationen i x-led ges av

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta}$$

Från rörelseekvationerna, Ekv. (1) känner vi $\ddot{\theta}$ som funktion av θ, men vi behöver också $\dot{\theta}^2$ som funktion av θ. Detta kan vi antingen få genom att sätta upp den totala energin och konstatera att den är bevarad, men vi kan också få $\dot{\theta}^2$ från rörelseekvationerna, Ekv. (1), genom att multiplicera dessa med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden,

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{mgl}{2}\sin\theta\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2}\cos\theta = A$$

där konstanten A bestäms från begynnelsevillkoren $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \alpha$, vilket ger $A = \frac{mgl}{2}\cos\alpha$. Vi kan då skriva vårt uttryck för $\ddot{x}$ som

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\left[\frac{3g}{l}\cos\alpha - \frac{3g}{l}\cos\theta\right] + \frac{l}{2}\cos\theta\left[\frac{3g}{2l}\sin\theta\right] = \left[\frac{9}{4}\cos\theta - \frac{3}{2}\cos\alpha\right]g\sin\theta$$

vilket är noll då

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)$$

d v s detta är den vinkel vid vilken stegen förlorar kontakten med väggen.

Uppgift 2

a) Vi utnyttjar definitionen av tröghetstensorns komponenter

$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}\left[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\delta_{ij} - r_i r_j\right]$$

P g a symmetrin kan vi konstatera att alla tröghetsprodukter (d v s icke-diagonala element i $\mathbf{I}$) är noll. Vi har också att $I_{xx} = I_{yy}$ p g a symmetrin. Vi behöver således bara beräkna två element, I_{xx} och I_{zz}, vilket enklast görs i cylinderkoordinater (med $\rho = m/(\pi R^2 h)$),

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R (y^2 + z^2) r dr \\
&= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R (r^2\sin^2\phi + z^2) r dr \\
&= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \left[\frac{R^4}{4}\sin^2\phi + z^2\frac{R^2}{2}\right] \\
&= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \left[\frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}(\phi - \sin\phi\cos\phi)\right]_0^{2\pi} + \frac{2\pi R^2}{2}z^2\right] \\
&= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \left[\frac{2\pi R^4}{8} + \frac{2\pi R^2}{2}z^2\right] = \frac{m}{\pi R^2 h}\left[\frac{2\pi R^4}{8}z + \frac{2\pi R^2}{6}z^3\right]_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{m}{\pi R^2 h}\left[\frac{2\pi R^4 h}{8} + \frac{2\pi R^2 h^3}{24}\right] = \frac{1}{12}m\left[h^2 + 3R^2\right]
\end{aligned}$$

För I_{zz} får vi

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R (x^2+y^2) r dr = \frac{m}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{m}{\pi R^2 h} h 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

Tröghetstensorn ges således av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m\left(h^2+3R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m\left(h^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{pmatrix}$$

vilket är precis vad vi skulle visa.

b) Att cylindern inte precesserar oavsett begynnelsevillkor innebär att vinkelhastighetsvektorn ω är konstant oavsett hur cylindern roterar initialt. Enligt Eulers dynamiska ekvationer innebär det att alla $\dot{\omega}_i = 0$, vilket för godtycklig begynnelsevinkelhastighet ω_0 innebär att alla tröghetsmoment måste vara lika, dvs $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Dessa är alla lika då $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, d v s då

$$\frac{1}{12} m\left(h^2+3R^2\right) = \frac{1}{2} m R^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{3} R$$

Uppgift 3

a) Problemet har en frihetsgrad och vi kan välja massan ms avstånd r från rotationsaxeln som generaliserad koordinat. Den kinetiska och potentiella energin ges då av

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\right) \quad ; \quad U = \frac{1}{2} k (r-b)^2 = \frac{1}{2} k\left(r^2+b^2-2br\right)$$

Lagrangianen ges således av

$$L = T - U = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\right) - \frac{1}{2} k\left(r^2+b^2-2br\right)$$

Dess derivator är

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m\omega_0^2 r + kb - kr = (m\omega_0^2 - k) r + kb \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger då rörelseekvationerna

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r = \frac{kb}{m} \tag{2}$$

b) Rörelseekvationen, Ekv. (2), har den allmänna lösningen

$$r(t) = r_h(t) + r_p(t)$$

där $r_h(t)$ är lösningen till den homogena ekvationen (med högerledet lika med noll) och $r_p(t)$ är partikulärlösningen för det högerled rörelseekvationen har. Partikulärlösningen ges av

$$r_p(t) = \frac{kb}{m\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}$$

För den homogena ekvationen får vi olika typer av lösningar beroende på tecknet på koefficienten $\frac{k}{m} - \omega_0^2$:

$$\begin{cases} \frac{k}{m} - \omega_0^2 & > & 0 & \Rightarrow & \text{Oscillerande cos- och sin-lösningar} \\ \frac{k}{m} - \omega_0^2 & < & 0 & \Rightarrow & \text{Exponentiellt växande cosh- och sinh-lösningar} \\ \frac{k}{m} - \omega_0^2 & = & 0 & \Rightarrow & \text{Linjärt växande/avtagande (eller konstanta) lösningar} \end{cases}$$

c) Partikulärlösningen ges i detta fall av

$$r_p(t) = 2b$$

Den homogena ekvationen ges av

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$$

vilken har lösningen

$$r_h(t) = A\sin(\omega_0 t + \beta) \quad ; \quad A, b = \text{konstanter}$$

vilket ger den fullständiga lösningen

$$r(t) = A\sin(\omega_0 t + \beta) + 2b.$$

Begynnelsevillkoret $\dot{r}(0) = 0$ ger att $\beta = \pi/2$ medan $r(0) = b$ ger att $A = -b$. Lösningen ges således av

$$r(t) = 2b - b\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = 2b - b\cos\omega_0 t.$$

Massan m utför med andra ord harmoniska oscillationer runt jämviktsläget $2b$ med amplituden b.

Uppgift 4

a) Med laddningsflödena enligt figur blir den kinetiska och potentiella energin

$$T = \frac{1}{2}L\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{1}{2}L'\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 \quad ; \quad U = \frac{1}{2}\frac{q_1^2 + q_2^2}{C}$$

vilket ger Lagrangefunktionen (här skriven som $\mathcal{L}$ för att undvika sammanblandning med induktansen L)

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}L\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{1}{2}L'\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - \frac{1}{2C}\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} & = & L\dot{q}_1 + L'(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2} & = & L\dot{q}_2 + L'(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1} & = & -\frac{1}{C}q_1 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2} & = & -\frac{1}{C}q_2 \end{cases}$$

Detta insatt i Lagranges ekvationer ger oss rörelseekvationerna

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + L'(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{1}{C}q_1 = 0 \\ L\ddot{q}_2 + L'(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{1}{C}q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (L + L')\ddot{q}_1 + L'\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_1 = 0 \\ L'\ddot{q}_1 + (L + L')\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

b) Vi antar att lösningarna kommer att vara oscillerande och ges då på formen

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

där a_1 och a_2 är konstanter och ω är våra sökta vinkelfrekvenser. Insatt i Ekv. (3) ger detta

$$\begin{cases} -a_1(L+L')\omega^2 - L'a_2\omega^2 + \frac{1}{C}a_1 = 0 \\ -a_1L'\omega^2 - (L+L')a_2\omega^2 + \frac{1}{C}a_2 = 0 \end{cases}$$

Skrivet på matrisform får vi

$$\begin{pmatrix} (L+L')\omega^2 - \frac{1}{C} & L'\omega^2 \\ L'\omega^2 & (L+L')\omega^2 - \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

vilket har en icke-trivial lösning om determinanten för koefficientmatrisen är noll, dvs om

$$0 = \begin{vmatrix} (L+L')\omega^2 - \frac{1}{C} & L'\omega^2 \\ L'\omega^2 & (L+L')\omega^2 - \frac{1}{C} \end{vmatrix} = \left[(L+L')\omega^2 - \frac{1}{C}\right]^2 - L'^2\omega^4$$

vilket ger oss

$$\omega^2(L+L') - \frac{1}{C} = \pm L'\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2\left[(L+L') \mp L'\right] = \frac{1}{C}$$

vilket ger oss lösningarna

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{1}{CL} \\ \omega^2 = \frac{1}{C(2L'+L)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{\frac{1}{CL}} \\ \omega = \pm\sqrt{\frac{1}{C(2L'+L)}} \end{cases}$$

vilket är våra sökta vinkelfrekvenser.

Uppgift 5

a) Vi måste först ta fram Hamiltonfunktionen och gör detta genom att ta fram Lagrangefunktionen och sedan transformera oss till Hamiltonfunktionen. Vi kan först konstatera att en kraft på formen $F(t)$ kan härledas från en potential U enligt

$$F(t) = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad U(x,t) = -F(t)x + \text{konst}$$

där vi kan sätta den godtyckliga konstanten i $U(x,t)$ till noll. Vår Lagrangefunktion ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F(t)x \tag{4}$$

Den kanoniska rörelsemängden p ges av

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{5}$$

och detta ger oss vår Hamiltonfunktion

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - F(t)x = \frac{p^2}{2m} - F(t)x \tag{6}$$

Hamilton-Jacobis ekvation för vår genererande funktion $S(x,P,t)$ blir då

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - F(t)x + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

b) Den vanliga separationsansatsen $S(x,P,t) = S_1(x,P) + S_1(t,P)$ fungerar inte i detta fall eftersom Hamiltonfunktionen beror explicit av tiden. Vi provar därför följande ansats (enligt ledningen)

$$S(x,P,t) = S_1(t,P)x + S_2(t,P)$$

Insatt i Ekv. (7) ger detta[1]

$$\frac{1}{2m}\left(S_1(t)\right)^2 - F(t)x + \frac{\partial S_1}{\partial t}x + \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0$$

I vänsterledet har vi termer av ordning 0 och 1 i x. Eftersom koefficienterna framför dessa termer enbart beror av t måste de vara noll oberoende av varandra, d v s

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t} = F(t) \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{1}{2m}S_1^2 \end{cases} \tag{8}$$

Med $F(t) = A\sin\omega_0 t$ ger den första av dessa ekvationer att

$$S_1(t) = -\frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t + a$$

Notera att vi ej kan sätta konstanten $a = 0$ eftersom den kommer in multiplicerad med x i S. Vår konstant a är därför en konstant som beror av vår nya konstanta rörelsemängd α. Låt oss välja $a = \alpha = P$, där $P = \alpha$ är vår nya konstanta rörelsemängd. Den andra ekvationen i Ekv. (8) blir nu

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[\alpha^2 + \frac{A^2}{\omega_0^2}\cos^2\omega_0 t - 2\alpha\frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t\right]$$

Denna ekvation kan vi integrera och får då

$$S_2(t) = -\frac{\alpha^2}{2m}t - \frac{A^2}{2m\omega_0^2}\left[\omega_0 t + \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\right] + \frac{\alpha A}{m\omega_0^2}\sin\omega_0 t + b$$

Konstanten b kan vi sätta till noll eftersom den kommer in i S som en ren additativ konstant vilken ej påverkar transformationen. Vår genererande funktion ges därför slutligen av

$$S = \left[-\frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t + \alpha\right]x - \left[\frac{\alpha^2}{2m} + \frac{A^2}{2m\omega_0}\right]t - \frac{A^2}{2m\omega_0^2}\ \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t + \frac{\alpha A}{m\omega_0^2}\sin\omega_0 t$$

Låt oss nu utnyttja denna genererande funktion för att transformera oss till nya kanoniska variabler $\{Q,P\}$. Eftersom den nya Hamiltonfunktionen $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ vet vi att både $Q = \beta$ och $P = \alpha$ är konstanter. Från variabelsambanden för S kan vi nu ta fram transformationen från gamla variabler till nya:

$$\begin{cases} p &= \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha - \frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = x - \frac{\alpha t}{m} + \frac{A}{m\omega_0^2}\sin\omega_0 t \end{cases}$$

Ur dessa ekvationer kan vi lösa ut de gamla variablerna som funktion av de nya konstanta variablerna:

$$\begin{cases} x &= Q + \frac{\alpha t}{m} - \frac{A}{m\omega_0^2}\sin\omega_0 t \\ p &= \alpha - \frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t \end{cases}$$

[1] Beroendet av den nya rörelsemängden P skrivs ej ut explicit i det följande.

Våra nya konstanter $P = \alpha$ och Q ges från begynnelsevillkoren:

$$\begin{cases} x(0) = 0 & \Rightarrow \quad Q = 0 \\ p(0) = 0 & \Rightarrow \quad \alpha = \frac{A}{\omega_0} \end{cases}$$

Detta ger oss lösningen

$$\begin{cases} x(t) & = & \frac{A}{m\omega_0}\left[t - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right] \\ p(t) & = & \frac{A}{\omega_0}\left[1 - \cos\omega_0 t\right] \end{cases}$$