Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-55 37 87 26

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

24 augusti 2001

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Se Scheck, avsnitt 3.2.

b) Tröghetstensorn ges av

$$\vec{\vec{I}} = \int \left[\vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\vec{x}\right] \rho(\vec{x}) d^3x$$

där $\vec{x}\cdot\vec{x}$ är en vanlig skalärprodukt och $\vec{x}\vec{x}$ är en dyadprodukt. I ett kartesiskt koordinatsystem ges komponenterna av

$$I_{ij} = \int \left[\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j\right] \rho(\vec{x}) d^3x. \quad (1)$$

Enligt Ekv. (1) har vi

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int (x^2+y^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &\leq \int (z^2+x^2+y^2+z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= \int (z^2+x^2)\rho(\vec{x})d^3x + \int (y^2+z^2)\rho(\vec{x})d^3x \\ &= I_{yy} + I_{xx}, \end{aligned}$$

d v s, $I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy}$, vilket är precis vad som skulle visas.

Likhet gäller då

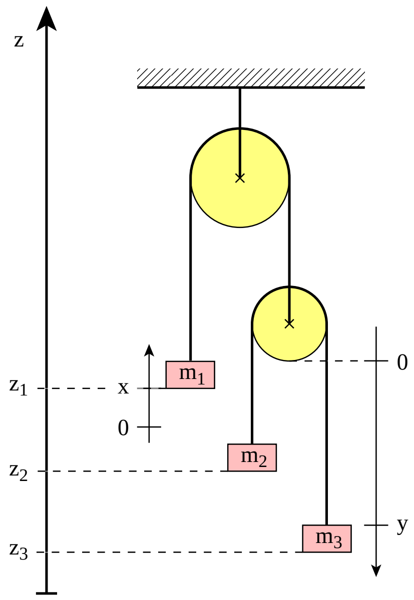
$$\int z^2 \rho(\vec{x}) d^3x = 0,$$

d v s då kroppen saknar utsträckning i z-led, d v s är en tunn plan skiva i xy-planet.

Uppgift 2

Vi inser att problemet har två frihetsgrader och vi väljer x och y som generaliserade koordinater enligt figur. x är massa 1s läge i förhållande till ursprungsläget. y är massa 3s läge i förhållande till den högra trissan. Detta innebär att vi kan skriva ändringen av höjden för de tre massorna som

$$\begin{cases} z_1 &= x \\ z_2 &= y - x \\ z_3 &= -y - x \end{cases} \tag{2}$$



Detta ger den kinetiska energin

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{z}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}-\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x}-\dot{y})^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{y}^2 + (m_3-m_2)\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

Den potentiella energin ges av

$$U = m_1gz_1 + m_2gz_2 + m_3gz_3 = (m_1 - m_2 - m_3)gx + (m_2 - m_3)gy$$

vilket ger oss Lagrangianen, $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{y}^2 + (m_3-m_2)\dot{x}\dot{y} - (m_1-m_2-m_3)gx - (m_2-m_3)gy \tag{3}$$

Derivatorna av L ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= -(m_1 - m_2 - m_3)g \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -(m_2 - m_3)g \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1+m_2+m_3)\dot{x} + (m_3-m_2)\dot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (m_2+m_3)\dot{y} + (m_3-m_2)\dot{x} \end{cases}$$

Lagranges ekvationer ger oss då rörelseekvationerna

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + (m_3-m_2)\ddot{y} + (m_1-m_2-m_3)g = 0 \tag{4}$$

$$(m_2+m_3)\ddot{y} + (m_3-m_2)\ddot{x} + (m_2-m_3)g = 0 \tag{5}$$

Genom substitution kan vi lösa ut $\ddot{x}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5). Vi erhåller då

$$[m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3)]\,\ddot{y} + 2m_1(m_2-m_3)g = 0$$

På samma sätt kan vi lösa ut $\ddot{y}$ ur Ekv. (4) och sätta in i Ekv. (5) för att erhålla

$$[m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3]\,\ddot{x} + [m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3]\,g = 0$$

Båda dessa ekvationer integreras enkelt två gånger för att ge lösningen

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{[m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3]\,g}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + At + B \\ y(t) &= -\frac{2m_1(m_2-m_3)g}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\frac{t^2}{2} + Ct + D \end{aligned}$$

där A, B, C och D är konstanter vilka bestäms av begynnelsevillkoren. Insatt i Ekv. (2) ger dessa ekvationer oss rörelsen för de tre massorna.

Uppgift 3

a) Poissonparentesen mellan två kanoniska variabler f och g definieras som

$$\{f,g\} = \sum_i^f \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right]$$

Betrakta nu en transformation från $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ till $(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{P})$, där

$$\begin{cases} Q_i &= Q_i(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \\ P_j &= P_j(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) \end{cases}$$

Denna transformation är kanonisk om följande gäller

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\} &= 0 \quad ; \quad \forall\ i,j \\ \{P_i, P_j\} &= 0 \quad ; \quad \forall\ i,j \\ \{P_i, Q_j\} &= \begin{cases} 0 & ; \ \forall\ i \neq j \\ 1 & ; \ \forall\ i = j \end{cases} \end{cases}$$

b) Vi vet att tidsutvecklingen för en kanonisk variabel f ges av

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{6}$$

Låt nu $f = q_1p_2 - q_2p_1$ och sätt in detta i Ekv. (6) och kräv att $df/dt = 0$,

$$0 = \frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{0} + \{H, f\} = \{q_1p_2 - q_2p_1, \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + a_1q_1^2 + a_2q_2^2\} \tag{7}$$

Notera nu att alla Possionparenteser mellan de kanoniska variablerna är noll förutom

$$\{p_i, q_j\} = 1 \text{ om } i = j.$$

Vi kan vidare utnyttja följande egenskaper hos Poissonparenteserna för att förenkla vårt uttryck,

$$\{f, gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h \quad ; \quad \{fg, h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g \quad ; \quad \{f,g\} = -\{g,f\}$$

Ekv. (7) kan då förenklas till

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p_2}{2m}\{q_1, p_1^2\} + a_2q_1\{p_2, q_2^2\} - \frac{p_1}{2m}\{q_2, p_2^2\} - a_1q_2\{p_1, q_1^2\} \\ &= \frac{p_2}{2m}2p_1\underbrace{\{q_1, p_1\}}_{-1} + a_2q_12q_2\underbrace{\{p_2, q_2\}}_{1} - \frac{p_1}{2m}2p_2\underbrace{\{q_2, p_2\}}_{-1} - a_1q_22q_1\underbrace{\{p_1, q_1\}}_{1} \\ &= \frac{p_1p_2}{2m} - \frac{p_1p_2}{2m} + 2q_1q_2(a_2 - a_1) = 2q_1q_2(a_2 - a_1) \end{aligned}$$

Vi ser således att vi måste kräva att $a_1 = a_2$ för att $q_1p_2 - q_2p_1$ ska vara en rörelsekonstant.

Uppgift 4

Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\dot{l}^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\alpha^2$$

och den potentiella energin ges av

$$U = -mgl(t)\cos\varphi.$$

Lagrangianen ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\alpha^2 + mgl\cos\varphi.$$

Den kanoniska rörelsemängden är

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

vilket slutligen ger oss Hamiltonianen

$$\begin{aligned} H &= p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{p_\varphi^2}{ml^2} - \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\varphi}{ml^2}\right)^2 - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mlg\cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2(t)} - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mgl(t)\cos\varphi = H(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Vi noterar att Hamiltonianen beror explicit av tiden p.g.a det tidsberoende tvånget (längden på snöret som minskar med tiden).
Energin för systemet ges av

$$E = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2(t)} + \frac{1}{2}m\alpha^2 - mgl(t)\cos\alpha = E(t) \tag{9}$$

Notera att energin $E \neq H$. Jämför vi Ekv. (8) och (9) ser vi att

$$E(t) = H(t) + m\alpha^2$$

Eftersom Hamiltonianen beror explicit av tiden kan den ej vara en rörelsekonstant, vi har att

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$$

Av samma anledning är energin ej heller en rörelsekonstant,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \{H, H + m\alpha^2\} = \frac{\partial E}{\partial t} \neq 0$$

Så, vi har sett att Hamiltonianen ej är lika med den totala energin och vi har också sett att varken Hamiltonianen eller energin är rörelsekonstanter. Om våra tvångsvillkor ej beror på tiden och vi skriver Lagrangianen på dess naturliga form $L = T - U$ så ges Hamiltonianen av $H = T + U$, men i detta fall beror tvånget på tiden och då gäller inte detta. Vi utbyter också energi med systemet genom den externa kraften som drar i snöret och därför är energin ej bevarad.

Uppgift 5

a) Vi inför ett roterande koordinatsystem $\bar{K}$ där x- och y-axlarna ligger i frisbeens plan och z-axeln ligger längs med symmetriaxeln vinkelrätt mot detta plan. Detta är ett principalsystem med tröghetsmomenten (se Physics Handbook, eller räkna ut dem)

$$I_1 = \frac{1}{4}mr^2 \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{4}mr^2 \quad ; \quad I_3 = \frac{1}{2}mr^2$$

Euler's dynamiska ekvationer i vårt system $\bar{K}$ lyder

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_1 + \frac{I_3-I_2}{I_1}\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 & = & \bar{N}_1 \\ \dot{\bar{\omega}}_2 + \frac{I_1-I_3}{I_2}\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1 & = & \bar{N}_2 \\ \dot{\bar{\omega}}_3 + \frac{I_2-I_1}{I_1}\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 & = & \bar{N}_3 \end{cases}$$

I vårt fall är $I_1 = I_2$ och alla vridmoment $\bar{N}_i = 0$, vilket ger oss

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_1 + \frac{I_3-I_1}{I_1}\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 & = & 0 \\ \dot{\bar{\omega}}_2 - \frac{I_3-I_1}{I_1}\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1 & = & 0 \\ \dot{\bar{\omega}}_3 & = & 0 \end{cases}$$

Den sista av dessa ekvationer ger omedelbart att

$$\bar{\omega}_3 = \Omega_{||} = \text{konst.}$$

Inför nu följande konstant

$$\Omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\bar{\omega}_3$$

och vi kan skriva de första två av Eulers dynamiska ekvationer som

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}}_1 & = & -\Omega_0\bar{\omega}_2 \\ \dot{\bar{\omega}}_2 & = & \Omega_0\bar{\omega}_1 \end{cases}$$

Lösningen till dessa ekvationer är lätt och finna och ges av

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 & = & \Omega_\perp \cos(\Omega_0 t + \beta) \\ \bar{\omega}_2 & = & \Omega_\perp \sin(\Omega_0 t + \beta) \end{cases}$$

Vinkelhastighetsvektorn uttryckt i $\bar{K}$-systemet ges således av

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \big(\Omega_\perp \cos(\Omega_0 t + \beta), \Omega_\perp \sin(\Omega_0 t + \beta), \Omega_{||}\big)$$

Uttryckt i $\bar{K}$-systemet ges rörelsemängdsmomentet av

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{L}} &= \boldsymbol{I} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = (I_1\bar{\omega}_1, I_2\bar{\omega}_2, I_3\bar{\omega}_3) \\ &= \big(I_1\Omega_\perp \cos(\Omega_0 t + \beta), I_1\Omega_\perp \sin(\Omega_0 t + \beta), I_3\Omega_{||}\big) \end{aligned}$$

Från uttrycken för $\bar{\boldsymbol{L}}$ och $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ är det uppenbart att symmetriaxeln ($\bar{3}$-axeln), $\bar{\boldsymbol{L}}$ och $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ ligger i samma plan.

b) Eftersom inga externa kraftmoment verkar på frisbeen, måste $\boldsymbol{L}$ vara bevarad. Eftersom $\boldsymbol{L}$ roterar kring $\bar{3}$-axeln med vinkelhastigheten Ω_0 i $\bar{K}$-systemet, måste $\bar{3}$-axeln rotera med vinkelhastigheten Ω_0 kring $\boldsymbol{L}$ i ett icke-roterande system. Den sökta vinkelhastigheten är således

$$\Omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\bar{\omega}_3$$

Om ω_0 är vinkelhastigheten för rotationen kring rotationsaxeln så är $\bar{\omega}_3 = \omega_0 \cos\alpha$ varför vi får att

$$\Omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_0 \cos\alpha$$

Om vi nu sätter in uttrycken för I_3 och I_1 samt att $\omega_0 = 2\pi\nu$ får vi slutligen den sökta vinkelhastigheten

$$\Omega_0 = 2\pi\nu \cos\alpha$$