Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

2 juni 2001

Lösningar finns så småningom även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/am/index.html.

Uppgift 1

a) Den kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m\left(R\sin\theta\omega\hat{\boldsymbol{\varphi}} + R\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

och den potentiella energin ges av

$$U = mgR\left(1-\cos\theta\right)$$

Lagrangefunktionen ges då av

$$L = T - U = \frac{1}{2}mR^2\left(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - mgR\left(1-\cos\theta\right)$$

och dess derivator är

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial L}{\partial \theta} & = & mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} & = & mR^2\dot{\theta} \end{array}\right.$$

Insatt i Lagranges ekvationer,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

ger detta

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \qquad (1)$$

vilket är den sökta rörelseekvationen för θ.

b) Från ekv. (1) ser vi att $\ddot{\theta} = 0$ för $\theta = 0$ varför $\theta = 0$ är en jämviktspunkt. För att ta reda på om den är stabil eller inte Taylorutvecklar vi högerledet i ekv. (1) och tar med upp till linjära termer i θ, dvs vi sätter

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin\theta & \simeq & \theta \\ \cos\theta & \simeq & 1 \end{array}\right.$$

vilket ger

$$mR^2\ddot{\theta} \simeq \left(mR^2\omega^2 - mgR\right)\theta$$

Denna ekvation har oscillerande cos- och sin-lösningar om koefficienten framför θ i högerledet är negativ, annars är lösningen exponentialfunktioner. För att lösningen ska vara stabil måste därför koefficienten vara negativ, dvs

$$
\begin{aligned}
mR^2\omega^2 - mgR < 0 \\
\Rightarrow \omega^2 < \tfrac{g}{R} \\
\Rightarrow \omega_c = \sqrt{\tfrac{g}{R}}
\end{aligned}
$$

c) Från ekv. (1) ser vi att $\ddot{\theta} = 0$ då

$$\sin\theta\left(mR^2\omega^2\cos\theta - mgR\right) = 0.$$

Vi ser att denna ekvation är uppfylld då

$$\sin\theta = 0 \quad \text{eller} \quad \cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

Den första av dessa ger de två jämviktspunkterna $\theta = 0$ och $\theta = \pi$, medan den andra ekvationen endast har en lösning då $\omega > \omega_c$ då jämviktspunkten är

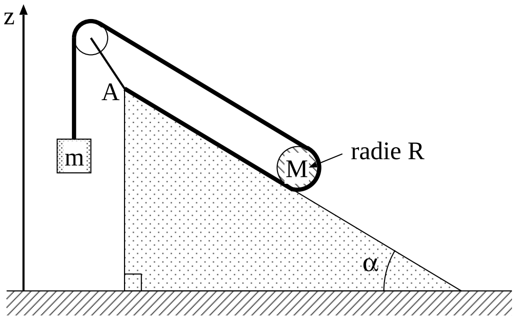
$$\theta = \arccos\frac{g}{R\omega^2}$$

Man kan visa att denna jämviktspunkt är stabil genom att Taylorutveckla högerledet i ekv. (1) runt $\theta = \arccos\frac{g}{R\omega^2}$.

Uppgift 2

a) Välj z som höjden för massan m som generaliserad koordinat. Den kinetiska energin för massan m ges då av

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$



När massan m har rört sig sträckan z så har massan M rört sig sträckan $z/2$. Dess kinetiska energi får bidrag både från masscentrums translation, men även från rotationen kring masscentrum,

$$T_M = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{2}\dot{z}\right)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

För en homogen cylinder ges tröghetsmomentet för rotation kring symmetriaxeln av $I = \frac{1}{2}MR^2$. Vinkelhastigheten ges vidare av $\omega = \frac{\dot{z}}{2R}$. Den kinetiska energin för M ges därför av

$$T_M = \frac{1}{8}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\dot{z}}{2R}\right)^2 = \frac{1}{8}M\dot{z}^2 + \frac{1}{16}M\dot{z}^2 = \frac{3}{16}M\dot{z}^2.$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mgz - Mg\frac{1}{2}z\sin\alpha$$

vilket slutligen ger Lagrangefunktionen

$$L = T_m + T_M - U = \left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{16}M\right)\dot{z}^2 - \left(mg - \frac{1}{2}Mg\sin\alpha\right)z.$$

Dess derivator är

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{1}{2}Mg\sin\alpha - mg \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \left(m + \frac{3}{8}M\right)\dot{z} \end{cases}$$

Lagranges ekvationer,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

ger då

$$\left(m + \frac{3}{8}M\right)\ddot{z} = \frac{1}{2}Mg\sin\alpha - mg \qquad (2)$$

vilken enkelt integreras och ger lösningen

$$z(t) = \frac{2Mg\sin\alpha - 4mg}{8m + 3M}t^2 + At + B \quad ; \quad A, B = \text{konstanter}$$

b) Systemet befinner sig i jämvikt då $\ddot{z} = 0$. Ekv. (2) ger att $\ddot{z} = 0$ då

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}Mg\sin\alpha - mg = 0 \\ \Rightarrow \alpha = \arcsin\tfrac{2m}{M}. \end{gathered}$$

Vi ser också att jämvikt endast kan erhållas då $M \geq 2m$.

Uppgift 3

a) Vi har att

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial (gh)}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial (gh)}{\partial p_i}\right] \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}h + g\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}h - g\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right] \\ &= g\sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right] + \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right]h = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \end{aligned}$$

Den andra relationen visas enkelt på samma sätt.

b) För att bestämma det villkor β och γ måste uppfylla för att L_z ska vara en rörelsekonstant kan vi t ex använda oss av Noethers teorem. Alternativt kan vi använda oss av Poisson-parenteser, genom att notera att

$$\frac{dL_z}{dt} = \{H, L_z\} + \underbrace{\frac{\partial L_z}{\partial t}}_{0} = \{H, L_z\}.$$

Vi vill med andra ord bestämma β och γ så att $\{H, L_z\} = 0$. Hamiltonfunktionen ges av

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + \alpha z^2 e^{\beta x^2 + \gamma y^2}$$

Rörelsemängdsmomentets z-komponent ges av

$$L_z = xp_y - yp_x.$$

Vi är nu redo att beräkna Poissonparentesen mellan H och L_z. Vi utnyttjar då de relationer som visades i a) samt att $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ samt $\{q_i, p_j\} = -\delta_{ij}$ för att förenkla vårt uttryck,

$$\begin{aligned}
\{H, L_z\} &= \{\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + \alpha z^2 e^{\beta x^2+\gamma y^2}, xp_y - yp_x\} = \\
&= \frac{1}{2m}\{p_x^2, xp_y\} - \frac{1}{2m}\{p_y^2, yp_x\} + \{\alpha z^2 e^{\beta x^2+\gamma y^2}, xp_y\} - \{\alpha z^2 e^{\beta x^2+\gamma y^2}, yp_x\} \\
&= \frac{1}{2m}p_x \underbrace{\{p_x, x\}}_{1} p_y - \frac{1}{2m}p_y \underbrace{\{p_y, y\}}_{1} p_x + \alpha z^2 x\{e^{\beta x^2+\gamma y^2}, p_y\} - \alpha z^2 y\{e^{\beta x^2+\gamma y^2}, p_x\} \\
&= \frac{1}{2m}\underbrace{\left[p_x p_y - p_y p_x\right]}_{0} + \alpha z^2 x \sum_i \left[\frac{\partial e^{\beta x^2+\gamma y^2}}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial p_y}{\partial q_i}}_{0} - \frac{\partial e^{\beta x^2+\gamma y^2}}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial p_y}{\partial p_i}}_{\delta_{i2}}\right] \\
&\quad -\alpha z^2 y \sum_i \left[\frac{\partial e^{\beta x^2+\gamma y^2}}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial p_x}{\partial q_i}}_{0} - \frac{\partial e^{\beta x^2+\gamma y^2}}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial p_x}{\partial p_i}}_{\delta_{i1}}\right] \\
&= -\alpha z^2 x \frac{\partial e^{\beta x^2+\gamma y^2}}{\partial y} + \alpha z^2 y \frac{\partial e^{\beta x^2+\gamma y^2}}{\partial x} \\
&= -\alpha z^2 x 2\gamma y e^{\beta x^2+\gamma y^2} + \alpha z^2 y 2\beta x e^{\beta x^2+\gamma y^2} = \alpha z^2 xy e^{\beta x^2+\gamma y^2}\left[\beta - \gamma\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{H, L_z\} = 0 \text{ om } \beta = \gamma$$

L_z är därmed bevarad om $\beta = \gamma$, vilket är vårt sökta villkor.

Anmärkning. $\{H, L_z\} = 0$ är uppfyllt även om $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$, men för att $\{H, L_z\} = 0$ ska gälla för godtyckliga begynnelsevillkor så måste $\beta = \gamma$.

Uppgift 4

a) Se Scheck, avsnitt 2.5 eller föreläsningsanteckningarna.

b) Detta löses enkelt med variationskalkyl. Avståndet mellan (x_0, y_0) och (x_1, y_1) ges av

$$L = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Vi kan använda oss av Eulers ekvation given i 4a med

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

Insatt i Eulers ekvation ger detta

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) - 0 = 0$$

vilken enkelt integreras till

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = A = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad y' = B = \text{konst.}$$

Integration en gång till ger

$$y = Bx + C$$

vilket är den räta linjens ekvation. Konstanterna B och C ges av villkoret att linjen ska gå igenom (x_0, y_0) och (x_1, y_1).

Uppgift 5

a) För en genererande funktion av typen U gäller att

$$q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i} \quad ; \quad P_j = -\frac{\partial U}{\partial Q_j} \quad ; \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Vi vill att den nya Hamiltonfunktionen, $\tilde{H}$ ska vara identiskt lika med noll, dvs att

$$H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Utnyttja nu att $q_i = -\frac{\partial U}{\partial p_i}$ och vi får

$$H(-\frac{\partial U}{\partial \underset{\sim}{p}_i}, \underset{\sim}{p}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

vilket är vår sökta Hamilton-Jacobi-ekvation i rörelsemängdsrepresentationen. Detta är en partiell differentialekvation för U med avseende på $\underset{\sim}{p}$ och t.

b) Med den givna Hamiltonfunktionen blir Hamilton-Jacobis ekvation i rörelsemängdsrepresentationen

$$\frac{p^2}{2m} - mg\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Ansätt nu att

$$U(p,t) = U_1(p) + U_2(t)$$

(där beroendet på det konstanta Q ej är explicit angivet). Insatt i ekv. (3) ger detta

$$\underbrace{\frac{p^2}{2m} - mg\frac{\partial U_1}{\partial p}}_{=E} + \underbrace{\frac{\partial U_2}{\partial t}}_{=-E} = 0$$

där vi inser att de första termerna bara beror av p medan den sista termen bara beror av t varför de båda måste vara konstanter och lika (fast med omvänt tecken). Vi får då en ekvation för U_1 och en för U_2,

$$\begin{cases} \frac{p^2}{2m} - mg\frac{\partial U_1}{\partial p} = E \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} = -E. \end{cases}$$

Dessa löses enkelt och vi får

$$\begin{cases} U_1 &= \frac{p^3}{6m^2 g} - \frac{Ep}{mg} + \text{konst.} \\ U_2 &= -Et + \text{konst.} \end{cases}$$

vilket ger vår sökta genererande funktion U,

$$U = \frac{p^3}{6m^2 g} - \frac{Ep}{mg} - Et + \text{konst.} \tag{4}$$

U ska dock vara en funktion av Q, p och t så vår separationskonstant E måste vara en funktion av vårt konstanta Q. Vi väljer att definiera $E = Q$ och låter vidare den godtyckliga konstanten i ekv. (4) vara noll, vilket ger oss

$$U(Q, p, t) = \frac{p^3}{6m^2 g} - \frac{Qp}{mg} - Qt. \tag{5}$$

Vi kan nu ta fram de variabelsamband som ger oss vår kanoniska transformation,

$$\begin{cases} q &= -\frac{\partial U}{\partial p} = -\frac{p^2}{2m^2 g} + \frac{Q}{mg} \\ P &= -\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{p}{mg} + t \end{cases}$$

Den andra av dessa ekvationer ger

$$p = mg\,(P - t) \tag{6}$$

vilket insatt i den första ekvationen ger

$$q = -\frac{g\,(P-t)^2}{2} + \frac{Q}{mg} \tag{7}$$

Hamiltons kanoniska ekvationer för de nya variablerna Q och P är triviala,

$$\begin{cases} \dot{Q} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q &= \beta = \text{konst.} \\ P &= \alpha = \text{konst.} \end{cases}$$

Insatt i ekv. (6)–(7) ger detta lösningen

$$\begin{cases} q(t) &= \frac{\beta}{mg} - \frac{g(\alpha - t)^2}{2} \\ p(t) &= mg\,(\alpha - t) \end{cases}$$

Begynnelsevillkoret $p(0) = mv_0$ ger $\alpha = v_0/g$ medan $q(0) = 0$ ger $\beta = mv_0^2/2$. Lösningen med de givna begynnelsevillkoren är således

$$\begin{cases} q(t) &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g} - t\right)^2 \\ p(t) &= mg\left(\frac{v_0}{g} - t\right) \end{cases}$$