Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

Lösningar till

Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

25 augusti 2000

Lösningar finns även tillgängliga på
http://www.physto.se/~edsjo/teaching/analmek/index.html.

Uppgift 1

a) Tröghetstensorns komponenter ges av

$$I_{jk} = \int \rho(\mathbf{x}) \left([x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]\delta_{jk} - x_j x_k \right) d^3x. \tag{1}$$

Vi kan börja med att konstatera att alla tröghetsprodukter (I_{jk} med $j \neq k$ i ekv. (1)) är noll p g a spegelsymmetri både xy-, xz- och yz-planen. Vidare måste alla tröghetsmoment (I_{jk} med $j = k$ i ekv. (1)) vara lika p g a symmetrin, d v s $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Det räcker därmed att beräkna ett av tröghetsmomenten. Vi väljer här att beräkna I_{zz}.

Massdensiteten ges av $\rho = M/a^3$ och I_{zz} ges då enligt ekv. (1) av

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \frac{M}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz \\
&= \frac{M}{a^3} [z]_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = \frac{M}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 [y]_{-a/2}^{a/2} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} \right) dx \\
&= \frac{M}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(ax^2 + \frac{a^3}{12} \right) dx = \frac{M}{a^2} \left(a \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} + \frac{a^3}{12} [x]_{-a/2}^{a/2} \right) = \frac{M}{a^2} \left(\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} \right) \\
&= \frac{Ma^2}{6}
\end{aligned}$$

Tröghetstensorn ges därför av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{6} \end{pmatrix} \tag{2}$$

b) Rotationsenergin ges av

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{I} \cdot \omega. \tag{3}$$

Vi kan skriva vinkelhastighetsvektorn som

$$\omega = \omega_0(n_x, n_y, n_z) \qquad ; \qquad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{4}$$

Rotationsenergin ges då av

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2}\frac{Ma^2}{6}\omega_0^2(n_x, n_y, n_z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{Ma^2\omega_0^2}{12}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = \frac{Ma^2\omega_0^2}{12}
\end{aligned}
$$

d v s rotationsenergin är $Ma^2\omega_0^2/12$ oberoende av rotationsaxelns riktning.

Uppgift 2

a) Notera att

$$
\frac{dM(q,t)}{dt} = \frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}
$$

Derivatorna av L' ges av

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial M}{\partial q} \\
\frac{\partial L'}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{dM}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t}
\end{aligned}
$$

Om vi kan visa att Lagranges ekvationer är uppfyllda för L' också så är vi klara. Sätt in uttrycken ovan i Lagranges ekvationer för L'

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right] + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial M}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned}
$$

dvs om den ursprungliga Lagrangefunktionen L uppfyller Lagranges ekvationer så gör L' det också. Rörelseekvationerna är därför invarianta under transformationen $L \to L'$.

b) För $L' = \alpha L$ får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} &= \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
\frac{\partial L'}{\partial q} &= \alpha \frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned}
$$

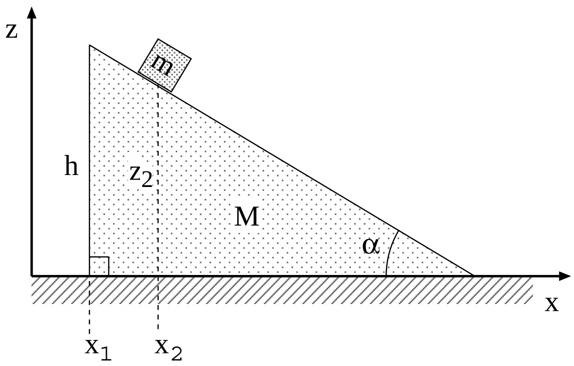
Sätt in i Lagranges ekvationer för L',

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right]
$$

Om $\alpha \neq 0$ kan vi dividera med α och vi ser då att om L uppfyller Lagranges ekvationer så gör L' det också.

Uppgift 3

a) Vi kan konstatera att problemet har två frihetsgrader, kilens läge och massan ms läge. Vi inför generaliserade koordinater enligt vidstående figur, där x_1 är kilens läge och x_2 är massan ms läge längs med x-axeln.
För att förenkla beräkningarna inför vi z_2 som är massan ms läge längs med den vertikala z-axeln (alternativt skulle vi kunna välja z_2 som generaliserad koordinat istället för x_2). Geometrin i problemet ger att



$$z_2 = h - (x_2 - x_1)\tan\alpha. \tag{5}$$

För att få fram den kinetiska energin noterar vi att massan ms hastighet ges av

$$\mathbf{v}_2 = \dot{x}_2\hat{\mathbf{x}} + \dot{z}_2\hat{\mathbf{z}} = \dot{x}_2\hat{\mathbf{x}} - (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan\alpha\hat{\mathbf{z}}$$

Den kinetiska energin ges således av

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\tan^2\alpha\right] \tag{6}$$

och den potentiella energin ges av

$$U = mgz_2 = mg\left[h - (x_2 - x_1)\tan\alpha\right]. \tag{7}$$

Detta ger oss Lagrangianen

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\tan^2\alpha\right] - mg\left[h - (x_2 - x_1)\tan\alpha\right]. \tag{8}$$

Derivatorna av Lagrangianen är således

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -mg\tan\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= M\dot{x}_1 - m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_2} &= mg\tan\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m\dot{x}_2 + m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\alpha) \end{cases} .$$

Insatt i Lagranges ekvationer ger detta våra rörelseekvationer

$$M\ddot{x}_1 - m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha = 0 \tag{9}$$
$$m\ddot{x}_2 + m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\alpha - mg\tan\alpha = 0 \tag{10}$$

b) Ekv. (9)+(10) ger

$$M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

vilket kan integreras på en gång till

$$Mx_1 + mx_2 = At + B$$

Begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ger att $A = B = 0$, vilket ger

$$Mx_1 = -mx_2. \tag{11}$$

Ekv. (9)-(10) ger efter integration

$$Mx_1 - mx_2 - 2m(x_2 - x_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha t^2 = Ct + D.$$

Begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ger att $C = D = 0$, vilket ger

$$Mx_1 - mx_2 - 2m(x_2 - x_1)\tan^2\alpha + mg\tan\alpha t^2 = 0.$$

Utnyttja nu ekv. (11) för att lösa ut x_1 och x_2,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -Ft^2 \\ x_2(t) & = & \frac{M}{m}Ft^2 \end{array}\right. \quad ; \quad F = \frac{mg\tan\alpha}{2M(1+\tan^2\alpha) + 2m\tan^2\alpha} \tag{12}$$

Ekv. (5) ger nu att

$$z_2 = h - (x_2 - x_1)\tan\alpha = h - \left(\frac{M}{m} + 1\right)\tan\alpha F t^2$$

och $z_2 = 0$ inträffar då

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{hm}{F(m+M)\tan\alpha}} = \sqrt{\frac{2h\left[M(1+\tan^2\alpha) + m\tan^2\alpha\right]}{g(m+M)\tan^2\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}\left[1 + \frac{M}{(m+M)\tan^2\alpha}\right]} \end{aligned} \tag{13}$$

d v s detta är den tid det tar innan massan m slår i det horisontella underlaget. Vid fritt fall skulle tiden istället ha varit

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{14}$$

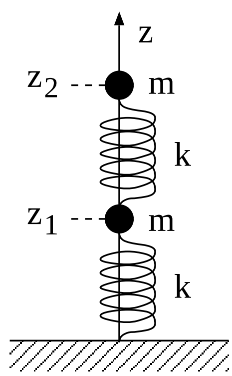
Vi ser att den första termen under rotuttrycket i ekv. (13) är samma som för fritt fall och att den andra termen således är korrektionen p g a kilen. Vi ser också att om $\alpha \to \pi/2$, så går den andra termen mot noll och vi återfår uttrycket för fritt fall, vilket verkar rimligt.

Uppgift 4

Se Scheck, avsnitt 2.23, samt föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 5

Systemet har två frihetsgrader och vi inför de generaliserade koordinaterna z_1 och z_2 för de två massornas lägen (se figur). Detta problem kan lösas på flera sätt och vi väljer här att ta fram rörelseekvationerna med hjälp av Lagranges ekvationer och sätta in en ansats till lösning (med hjälp av ledningen) för att lösa ut de möjliga vinkelfrekvenserna.



Den kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2$$

och den potentiella energin är

$$U = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2.$$

Lagrangefunktionen ges då av

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_2^2 - mgz_1 - mgz_2 - \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 - \frac{1}{2}k(z_2 - z_1 - a)^2$$

och dess derivator är

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z_1} &= -mg - k(z_1 - a) + k(z_2 - z_1 - a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} &= m\dot{z}_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z_2} &= -mg - k(z_2 - z_1 - a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} &= m\dot{z}_2 \end{cases} .$$

Detta insatt i Lagranges ekvationer ger

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2k}{m}z_1 + \frac{k}{m}z_2 - g \qquad (15)$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2 - g + \frac{ka}{m}. \qquad (16)$$

Detta system av andra ordningens differentialekvationer kan lösas på flera sätt. Ett sätt är att betrakta ekv. (15)+B(16) och bestämma B så att vi får *en* andra ordningens differentialekvation för $z_1 + B \cdot z_2$ som sedan enkelt löses och ger de sökta vinkelfrekvenserna[1]. Ett annat sätt är att enligt ledningen ansätta att lösningen till den homogena ekvationen,

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2k}{m}z_1 + \frac{k}{m}z_2 \qquad (17)$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2, \qquad (18)$$

är given på formen

$$\begin{cases} z_1 &= A\cos(\omega t + \delta) \\ z_2 &= B\cos(\omega t + \delta) \end{cases} \qquad (19)$$

Denna ansats insatt i ekv. (17)-(18), ger

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)A - \frac{k}{m}B\right] = 0 \\ \left[-\frac{k}{m}A + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)B\right] = 0 \end{cases} .$$

För att detta ekvationssystem för A och B ska ha en icke-trivial lösning måste determinanten för koefficientmatrisen vara noll, d v s

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0.$$

Löser vi ut ω ur denna ekvation erhåller vi de sökta vinkelfrekvenserna[2]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}$$

[1] Vi får två möjliga val av B som vardera ger en av de sökta vinkelfrekvenserna.

[2] Om vi skulle vara intresserade av de fullständiga lösningarna sätter vi in våra två ω i ekv. (17) eller (18) för att erhålla ett samband mellan A och B. På så vis får vi en lösning för varje ω och en linjärkombination av dessa två lösningar tillsammans med partikulärlösningen utgör sedan den fullständiga lösningen.