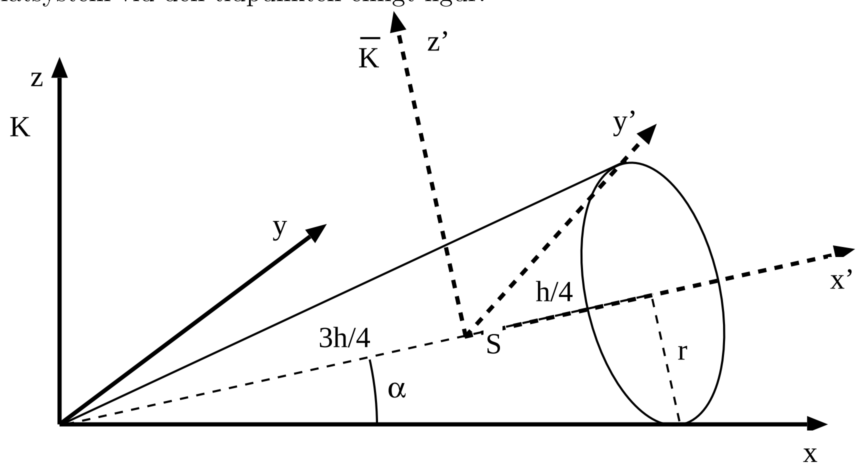
Joakim Edsjö
Fysikum, Stockholms Universitet
Tel: 08-674 76 48

### Lösningar till

# Tentamen i Analytisk Mekanik, 5p

### 27 maj 2000

**Uppgift 1**
Inför ett inertialsystem $K$ och ett kroppsfixt system $\bar{K}$ enligt figur. Notera först att eftersom konen rullar utan att glida så är spetsen fix i rummet. Vidare är vid varje given tidpunkt kontaktytan mellan konen och planet temporärt i vila, vilket innebär att vinkelhastighetsvektorn $\omega$ måste vara riktad längs med denna kontaktlinje. Vi betraktar systemet vid en viss given tidpunkt och orienterar våra koordinatsystem vid den tidpunkten enligt figur.




Vi kan skriva den kinetiska energin som

$$T = T_S + T_{\text{rot}}$$

där den första termen kommer från masscentrums rörelse och den andra termen kommer från rotationen runt masscentrum.
$T_S$ räknas enklast ut i systemet $K$, i vilket

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \hat{\mathbf{x}}$$

Vidare ges masscentrums läge av (Physics Handbook 1.8)

$$\mathbf{r}_S = \frac{3}{4} h \left( \hat{\mathbf{x}} \cos\alpha + \hat{\mathbf{z}} \sin\alpha \right)$$

Masscentrums hastighet är då

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_S = -\frac{3}{4} h \sin\alpha \omega_0 \hat{\mathbf{y}}$$

varför $T_S$ ges av

$$T_S = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}h\sin\alpha\omega_0\right)^2 = \frac{9}{32}mh^2\sin^2\alpha\,\omega_0^2$$

$T_{\rm rot}$ däremot räknas enklast ut i det kroppsfixa koordinatsystemet $\bar{K}$. I detta system ges $\omega$ av

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\left(\cos\alpha\hat{\mathbf{x}}' - \sin\alpha\hat{\mathbf{z}}'\right)$$

Enligt Physics Handbook 1.8 ges tröghetstensorn i systemet $\bar{K}$ av

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{80}(4r^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{80}(4r^2+h^2) \end{pmatrix}$$

Den kinetiska energin för rotationen kring masscentrum ges då av

$$\begin{aligned} T_{\rm rot} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2}\omega_0^2\begin{pmatrix} \cos\alpha & , & 0 & , & -\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{80}(4r^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{80}(4r^2+h^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2\left[\frac{3}{10}r^2\cos^2\alpha + \frac{12}{80}r^2\sin^2\alpha + \frac{3}{80}h^2\sin^2\alpha\right] \end{aligned}$$

Den totala kinetiska energin ges då slutligen av

$$\begin{aligned} T &= T_S + T_{\rm rot} = m\omega_0^2\left[\frac{9}{32}h^2\sin^2\alpha + \frac{3}{20}r^2\cos^2\alpha + \frac{3}{40}r^2\sin^2\alpha + \frac{3}{160}h^2\sin^2\alpha\right] \\ &= m\omega_0^2\left[\frac{6}{20}h^2\sin^2\alpha + \frac{3}{20}r^2\cos^2\alpha + \frac{3}{40}r^2\sin^2\alpha\right] \end{aligned}$$

Detta förenklas enklast genom att uttrycka alla vinklar i $r$ och $h$ enligt

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{r^2}{r^2+h^2} \\ \cos^2\alpha = \frac{h^2}{r^2+h^2} \end{cases}$$

vilket ger

$$T = \frac{3m\omega_0^2}{40}\frac{r^2(r^2+6h^2)}{r^2+h^2}$$

## Uppgift 2

a) Den totala energin är bevarad eftersom vi kan skriva krafterna som potentialkrafter där potentialen ej beror av tiden. Ett sätt att se detta explicit på är att betrakta Hamiltonfunktionen

$$H = T + U = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha z^2 e^{\beta(x^2+y^2)}$$

Notera att Hamiltonfunktionen är lika med den totala energin. Vi har då att

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = 0$$

dvs den totala energin är bevarad.

b) Detta visas enklast med hjälp av Noethers teorem. Lagrangefunktionen kan skrivas

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 - \alpha z^2 e^{\beta(x^2+y^2)}$$

Vi ser att denna Lagrangefunktion är invariant under rotationer kring $z$-axeln, ty rotationer kring $z$-axeln bevarar $x^2 + y^2$ invariant. En rotation kring $z$-axeln kan skrivas som

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \to \mathbf{h}^s(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' = (x', y', z') = (x\cos s + y\sin s, -x\sin s + y\cos s, z)$$

Detta ger att

$$\left.\frac{d}{ds}\mathbf{h}^s\right|_{s=0} = (-x\sin s + y\cos s, -x\cos s - y\sin s, 0)|_{s=0} = (y, -x, 0) = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}$$

Notera att $\partial L/\partial \dot{q}_i = m\dot{q}_i$, vilket insatt i Noethers teorem ger rörelsekonstanten

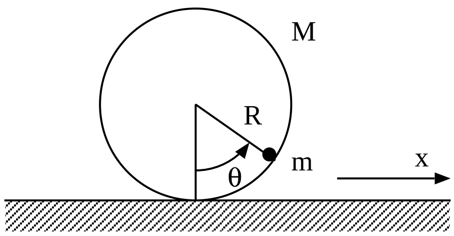
$$I = m\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}})$$

Vektoruttrycket kan med hjälp av en vektoranalysformel skrivas om så att

$$I = \hat{\mathbf{z}} \cdot (m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L} = -L_z.$$

Rörelsemängdsmomentets $z$-komponent är med andra ord bevarad.

## Uppgift 3




a) Välj partikelns utslag från lodlinjen, $\theta$, och cylinderns läge $x$ som generaliserade koordinater. Den kinetiska energin för cylindern ges av

$$T_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega I_z \omega$$

vilket med

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} \quad ; \quad I_z = MR^2$$

ger

$$T_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = M\dot{x}^2$$

Den kinetiska energin för massan $m$ ges av

$$T_{\text{p}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}\hat{x} + R\dot{\theta}\hat{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{\theta}}_{\cos\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

Sålunda ges den totala kinetiska energin av

$$T = \frac{1}{2}(2M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta.$$

Den potentiella energin ges av

$$U = mgR(1 - \cos\theta)$$

Vår Lagrangefunktion ges då slutligen av

$$L = T - U = \frac{1}{2}(2M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mgR(1-\cos\theta). \tag{1}$$

Derivatorna av Lagrangefunktionen ges då av

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (2M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\dot{\theta} + mR\dot{x}\cos\theta \end{cases}$$

Insatt i Lagranges ekvationer, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$, får vi då rörelseekvationerna

$$\frac{d}{dt}\left[(2M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta\right] = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[mR^2\dot{\theta} + mR\dot{x}\cos\theta\right] + mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgR\sin\theta = 0 \tag{3}$$

b) Ekv. (2) kan integreras på en gång och vi erhåller

$$(2M+m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta = A = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{A - mR\dot{\theta}\cos\theta}{2M+m}$$

Vi kan faktiskt integrera denna ekvation på en gång vilket ger

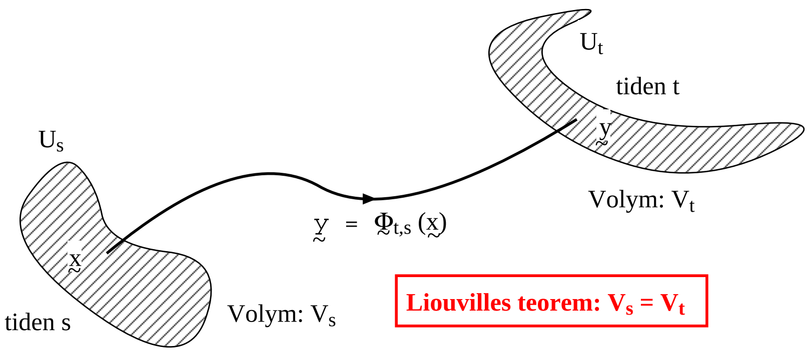
$$x = \frac{At - mR\sin\theta}{2M+m} + B \quad ; \quad B = \text{konstant.}$$

Med begynnelsevillkoren $x(t=0)=0$ och $\theta(t=0)=\pi/2$ ser vi att $C = mR/(2M+m)$. Med $\dot{x}(t=0)=0$ och $\dot{\theta}(t=0)=0$ ser vi att $A=0$. Vår lösning för de givna begynnelsevillkoren är således

$$x(\theta) = \frac{mR}{2M+m}(1-\sin\theta)$$

## Uppgift 4

a) Betrakta en uppsättning lösningar till våra rörelseekvationer $\underset{\sim}{x} = (q, p)$ vid tiden $s$. Dessa upptar regionen $U_s$ i fasrummet med volymen $V_s$. Vid tiden $t$ har våra lösningar transformerats till $\underset{\sim}{y}$ som upptar en region $U_t$ i fasrummet med volymen $V_t$. Liouvilles teorem säger att $V_s = V_t$.



b) Se föreläsningsanteckningarna eller Scheck, avsnitt 2.29.

## Uppgift 5

a) Utgå från vår ansats

$$\Psi(q,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)} \quad ; \quad A = \text{ konstant.} \tag{4}$$

Derivatorna av $\Psi$ med avseende på $q$ och $t$ ges av

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial t}Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial t}\Psi \\
\frac{\partial \Psi}{\partial q} &= \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial q}Ae^{\frac{i}{\hbar}S^*(q,t)} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S^*}{\partial q}\Psi \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} &= \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\Psi + \frac{\partial S^*}{\partial q}\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} + \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2\right]\Psi
\end{aligned}$$

Sätt in dessa derivator i Schrödingerekvationen och vi erhåller

$$\left[\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2 + U\right] + \frac{\partial S^*}{\partial t}\right]\Psi = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2}\Psi. \tag{5}$$

$\Psi$ kan vi dividera bort och ekv. (5) kan då skrivas

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2 + U\right] + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} \tag{6}$$

Vänsterledet känner vi igen som vår nya Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ om vi identifierar $S^*(q,t)$ med verkansfunktionen. Den nya Hamiltonfunktionen ska ju dock vara noll, men högerledet i ekv. (6) är skilt från noll.

b) Högerledet i ekv. (6) kan försummas om

$$\hbar\frac{\partial^2 S^*}{\partial q^2} \ll \left(\frac{\partial S^*}{\partial q}\right)^2. \tag{7}$$

Vi skriver nu om detta uttryck så att det blir tydligare när det är uppfyllt. Eftersom $p = \frac{\partial S^*}{\partial q}$ kan vi skriva ekv. (7) som

$$\hbar\frac{\partial p}{\partial q} \ll p^2$$

Utnyttja nu att deBroglie-våglängden är given av

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

vilket ger att villkoret skrivas

$$\frac{(\partial p/\partial q)}{p/\lambda} \ll 2\pi.$$

Dvs när våglängden är så liten att rörelsemängden ändras försumbart lite över en våglängd, då kan vi försumma högerledet i ekv. (6) och vi erhåller vår klassiska Hamilton-Jacobi-ekvation.

Notera att vi också kan erhålla den klassiska gränsen, i detta fall Hamilton-Jacobis ekvation, genom att låta $\hbar \to 0$, dvs genom att försumma kvantiseringen av verkan.