

Kaos i solsystemet (exempel på kaos, kap. 11)

De kanoniska system vi har studerat har alla haft en speciellt enkel egenskap

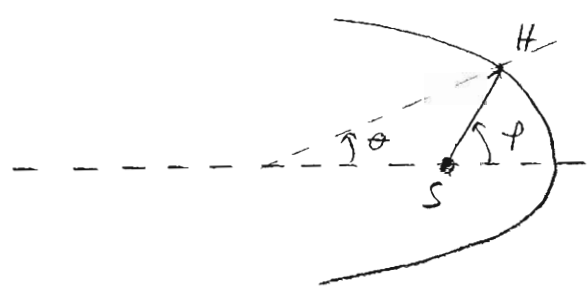
- separabilitet (eller integrabilitet)

Detta innebär att Hamilton-Jacobis ekvation kan separeras och varje generaliserad koordinat bestäms genom integration var för sig.

Vi skall nu se, genom ett exempel, att om systemet är icke-separabelt (eller icke-integrabelt) finns s.k. kaotiska rörelser.

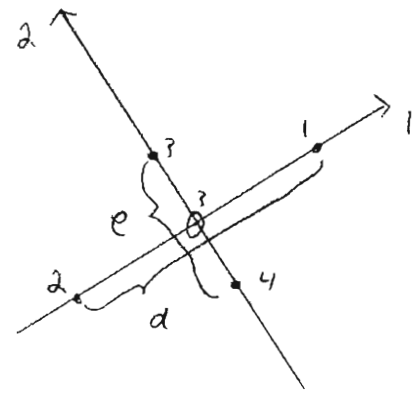
Exempel Hyperion - en asymmetrisk mån till Saturnus

Antag följande förenklade modell:



- Förenklat plan rörelse
- Betraktar Saturnus (S) som ett fikt kraftcentrum
- Antar att Hs rotationsaxel är vinkelrät mot planet
- θ anger Hyperions orientering.

Approximera Hyperion med 4 massor m enligt



Antag $e < d$

Hyperions massa: $m_H = 4m$

Tröghetsmomenten ges av

$$I_1 = m \left(\frac{e}{2}\right)^2 + m \left(\frac{e}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m e^2$$

$$I_2 = m \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m d^2$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} m (d^2 + e^2)$$

$$\Rightarrow I_1 < I_2 < I_3$$

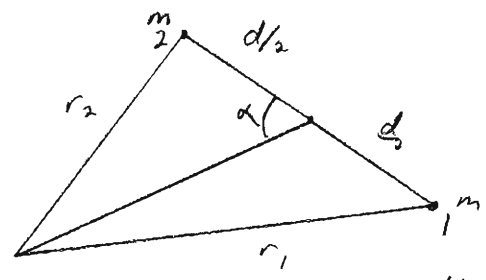
Antag att rotationen sker kring 3-axeln.

Generaliserade koordinater: (r, φ, θ)

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_H \underbrace{v^2}_{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 - U(r, \varphi, \theta)$$

Seh nu $U(r, \varphi, \theta)$. Eftersom gravitationsfältet \vec{g} är homogent (beror av r) måste vi sätta upp

$$U = - \sum_{i=1}^4 \frac{GMm}{r_i}$$



Nota aff

$$\begin{cases} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \approx \frac{2}{r} + \frac{3}{4} \frac{d^2}{r^3} \cos^2 \alpha \left(-\frac{d^2}{4r^3} \right) \\ \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \approx \frac{2}{r} + \frac{3}{4} \frac{e^2}{r^3} \sin^2 \alpha \left(-\frac{e^2}{4r^3} \right) \end{cases}$$

se.s. 142
Nota aff $\alpha = \varphi - \theta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &\approx -GM \frac{4m}{r} - GM \frac{3}{4} \frac{m}{r^3} (d^2 \cos^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha) = \\ &= -GM \frac{m_H}{r} + U_{inre}(r, \varphi, \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{med } U_{inre}(r, \varphi, \theta) &= -GM \frac{3}{2} \frac{1}{r^3} (I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha) \\ &= -GM \frac{3}{2} \frac{1}{r^3} (I_1 \sin^2(\varphi - \theta) + I_2 \cos^2(\varphi - \theta)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m_H (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 + GM \frac{m_H}{r} - U_{inre}(r, \varphi, \theta)$$

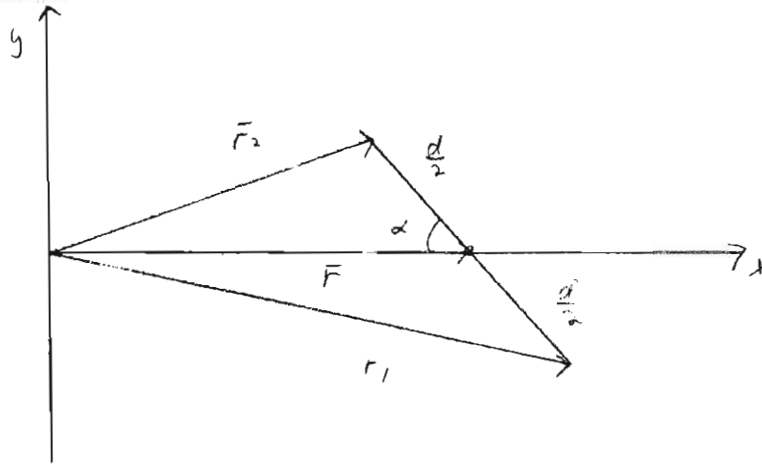
$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_H \dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_H r^2 \dot{\varphi}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_3 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow H = \dot{r} p_r + \dot{\varphi} p_\varphi + \dot{\theta} p_\theta - L = \dots =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m_H} + \frac{p_\varphi^2}{2m_H r^2} + \frac{p_\theta^2}{2I_3} - GM \frac{m_H}{r} + U_{inre}(r, \varphi, \theta)$$



$$\vec{r}_1 = \left(r + \frac{d}{2} \cos \alpha, -\frac{d}{2} \sin \alpha \right)$$

$$\vec{r}_2 = \left(r - \frac{d}{2} \cos \alpha, \frac{d}{2} \sin \alpha \right)$$

$$\Rightarrow r_1 = |\vec{r}_1| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} \cos^2 \alpha + rd \cos \alpha + \frac{d^2}{4} \sin^2 \alpha} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \alpha}$$

$$r_2 = |\vec{r}_2| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} \cos^2 \alpha - rd \cos \alpha + \frac{d^2}{4} \sin^2 \alpha} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \alpha}} \right]$$

Utnyttja att $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ och behåll termer

upp till ordning 2 i d.

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{4r^2} - \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \alpha + \frac{3}{8} \frac{d^2}{r^2} \cos^2 \alpha + 1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{4r^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \alpha + \frac{3}{8} \frac{d^2}{r^2} \cos^2 \alpha \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[2 - \frac{d^2}{4r^2} + \frac{3}{4} \frac{d^2}{r^2} \cos^2 \alpha \right] = \frac{2}{r} - \frac{d^2}{4r^3} + \frac{3}{4} \frac{d^2}{r^3} \cos^2 \alpha$$

P.S. för

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \approx \frac{2}{r} - \frac{e^2}{4r^3} + \frac{3}{4} \frac{e^2}{r^3} \sin^2 \alpha$$

Uttrefftja nu Hamiltons kanoniska ekvationer och
 försumma U_{int} i alla ekvationer utom den för \dot{p}_θ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \approx \frac{p_p^2}{2m_H r^3} - \frac{\partial}{\partial r} \left(-GM \frac{m_H}{r} \right) = \\ \quad = \frac{p_p^2}{2m_H r^3} - \frac{GMm_H}{r^2} \\ \dot{p}_p = -\frac{\partial H}{\partial p} \approx 0 \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial \theta} = GM \frac{3}{2} \frac{I_2 - I_1}{r^3} \sin(2(\varphi - \theta)) \end{array} \right.$$

De två första ekvationerna ger en Keplerörelse för Hyperions
 masscentrum. Den tredje ekvationen kan med $\dot{p}_\theta = I_3 \ddot{\theta}$
 skrivas

$$I_3 \ddot{\theta} = GM \frac{3}{2} \frac{I_2 - I_1}{r^3(t)} \sin[2(\varphi(t) - \theta)] \quad (*)$$

där $(r(t), \varphi(t))$ ges av Keplerörelsen.

M.h.a. Keplers 3:e lag kan vi skriva

$$GM = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a^3$$

med

$$\left\{ \begin{array}{l} T - \text{perioden} \\ a - \text{halva storaxeln} \end{array} \right.$$

Specialfall: Antag att Keplerrörelsen är en cirkel.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(t) = n t \\ r(t) = a \end{cases} ; n = \frac{2\pi}{T} = \text{vinkel/frekvensen}$$

Sätt $\theta' = \theta - n t \quad (\dot{\theta}' = -\dot{\alpha})$

$$I_3 \ddot{\theta}' = -\frac{3}{2} n^2 (I_2 - I_1) \sin 2\theta'$$

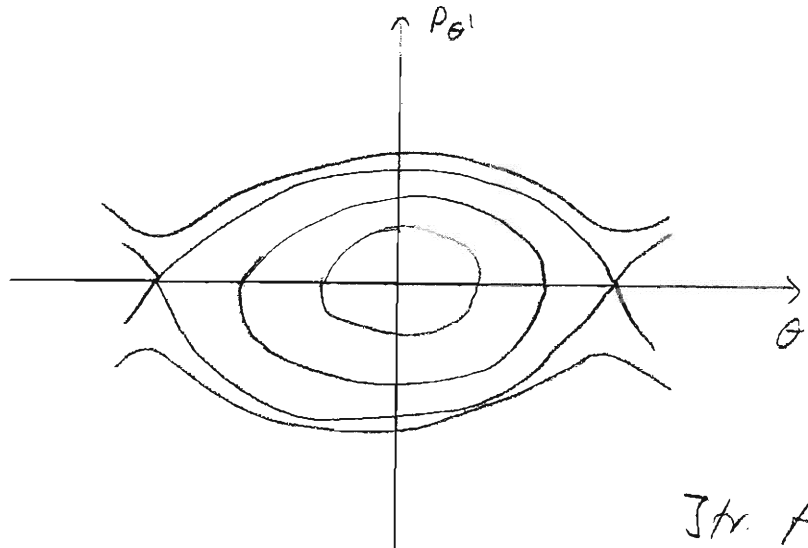
Jfr. ekr. för en plan pendel!

Små svängningar: $\sin 2\theta' \approx 2\theta'$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}' + \frac{3n^2(I_2 - I_1)}{I_3} \theta' = 0$$

$$\Rightarrow \theta'(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{3n^2(I_2 - I_1)}{I_3}} t + \beta\right)$$

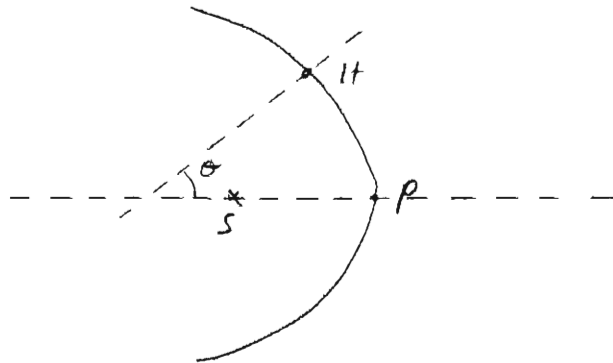
För godtyckliga utslagsvinklar:



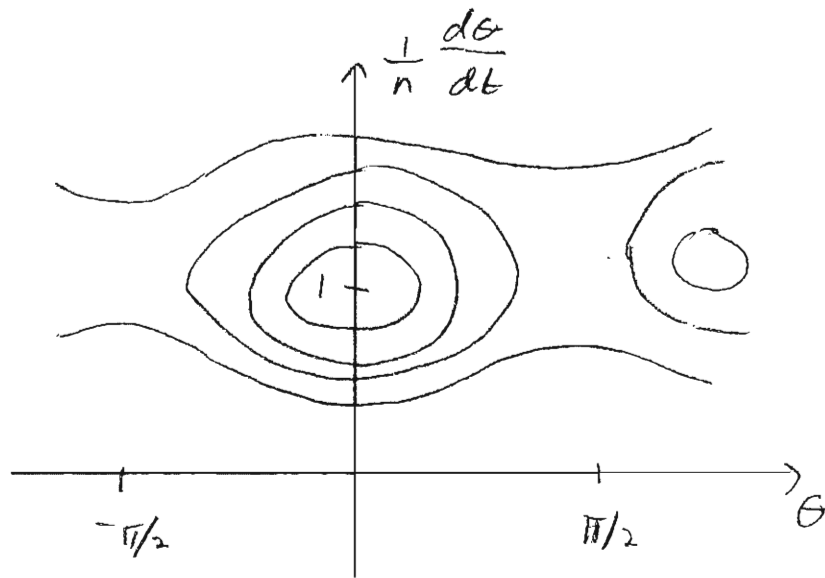
Jfr. Fig 1.10!

forts. specialfall

Låt oss representera lösningarna på följande sätt



V varje gång Hyperon (H) passera pericenter P avtän
 vi $(\theta, \frac{1}{n} \frac{d\theta}{dt})$:



Olika beg.
 villkor ger
 olika kurvor!
 Detta är en sk
 Poincaré-karta.

$\frac{1}{n} \frac{d\theta}{dt} = 1$ betyder $\dot{\theta} = n$, där $\theta' = 0$

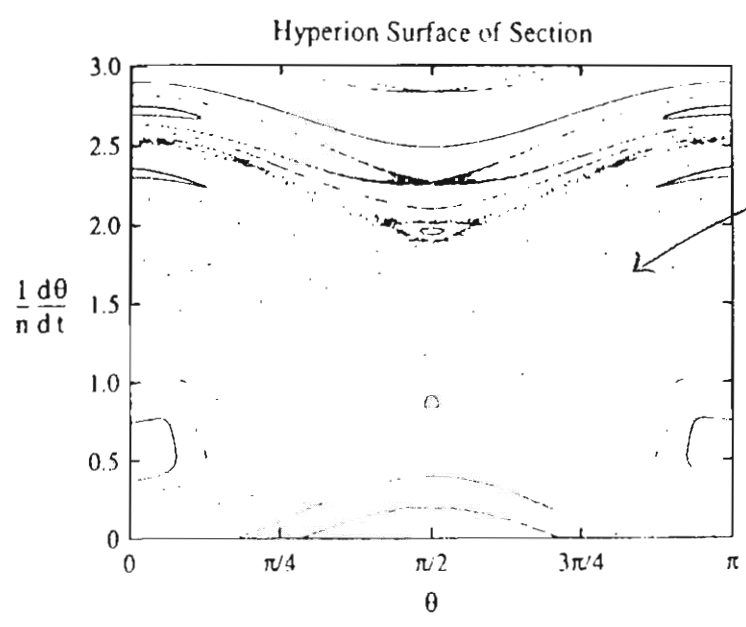
Då visa H alltid alltid samma sida mot S.

Små svängningar ger elliptiska ringar

"överslag" ger vägförmiga kurvor

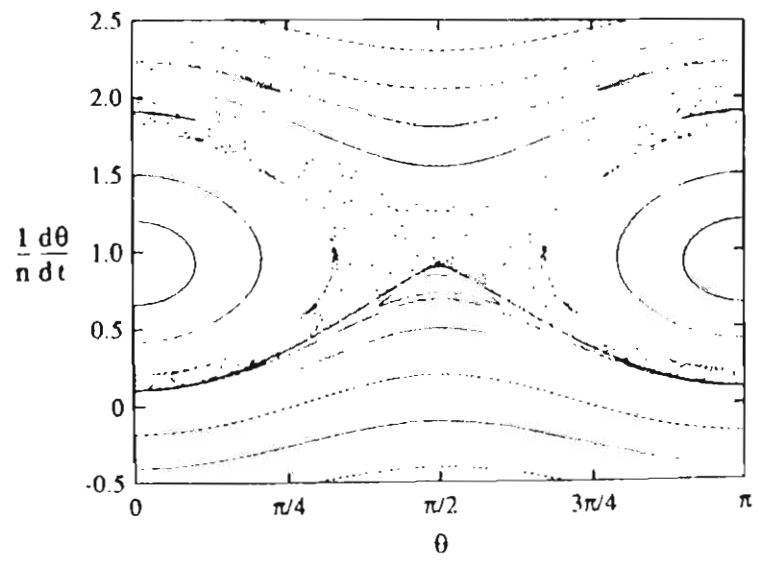
Om nu bankurvan ej är en cirkel blir observationen (k) svår att lösa analytiskt. Man kan dock lösa den numeriskt.

För Hyperion, satellit till Saturnus



ALLA deltar är en kurva!

För Phoebe, satellit till Mars



Vi erhåller

- kurvor = "normalt" beteende
- punkter som fyller ytor = kaos

De kaotiska är separerade från rotationskurvor

- Anm:
- Vi har antagit att rotationsaxeln ligger vinkelrätt mot Kepler-rörelsens plan. Om man har små avvikelser från detta växer dessa snabbt. Rörelsen är instabil. Hypotesen wobble runt! *
 - Det moderna studiet av dess effekter börjar med en prösuppgift som gavs av Kung Oscar II år 1885. Den vanns av Poincaré.

*) rot. axeln mätt till 10 decimaler av Voyage 1, Nov 1990
 ⇒ 5 fört slogs axeln Aug, 1981 (Voyage 2)