Vi har nu att (utan yttre krafter)

$$L = T_{rot}$$

Detta ger

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_3'}\frac{\partial \omega_3'}{\partial \dot\psi} = I_3 \omega_3'$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_1'}\frac{\partial \omega_1'}{\partial \psi} + \frac{\partial T_{rot}}{\partial \omega_2'}\frac{\partial \omega_2'}{\partial \psi} =$$

$$= I_1 \omega_1' \cdot \omega_2' + I_2 \omega_2' \cdot (-\omega_1') = (I_1 - I_2)\omega_1'\omega_2'$$

Lagranges ekvation,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

ger

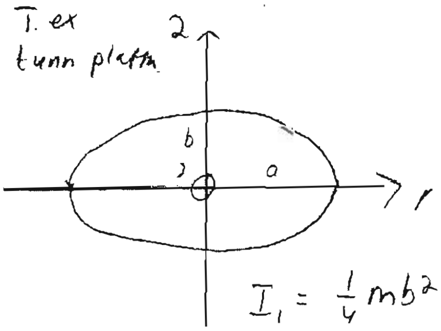
$$I_3 \dot\omega_3' = (I_1 - I_2)\omega_1'\omega_2'$$

vilket är precis en av Eulers dynamiska ekvationer (med $N_z = 0$).

De andra två följer genom cyklisk permutation.

Ex/ "Den tre-axlade snurran".

T. ex tunn platta



$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$$

Antag att

$$I_1 < I_2 < I_3$$

$\Rightarrow \begin{cases} I_1 \dot\omega_1' = (\text{neg. koeff.})\,\omega_2'\omega_3' & \text{– stabil} \\ I_2 \dot\omega_2' = (\text{pos. koeff.})\,\omega_1'\omega_3' & \text{– labil} \\ I_3 \dot\omega_3' = (\text{neg. koeff.})\,\omega_1'\omega_2' & \text{– stabil} \end{cases}$

$I_1 = \frac{1}{4} m b^2$

$I_2 = \frac{1}{4} m a^2$

$I_3 = I_1 + I_2$

se problem 5-7
eller s. 120-121

Kritiska punkter och karakteristiska exponenter

Antag autonomt system

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}, t) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$$

Def. Punkter $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}_0$ där $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}_0) = \underset{\sim}{0}$ kallas

<u>kritiska punkter</u>

Om $\underset{\sim}{F} = \left\{ \frac{1}{m} p, F(q) \right\} = \underset{\sim}{0}$ är $\begin{cases} p = 0 \\ F(q) = 0 \end{cases}$

Detta är ett villkor för <u>jämviktsläge</u>

Utveckla $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ kring $\underset{\sim}{x}_0$ och <u>linearisera</u>:

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) = \mathbb{A}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) + \ldots \simeq \mathbb{A}\underset{\sim}{z} \qquad , \quad \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{z}} = \mathbb{A}\underset{\sim}{z}$$

konstant matris

Ansatz $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{a} e^{\lambda t}$

konstant vektor

$$\Rightarrow \quad \lambda \underset{\sim}{a} e^{\lambda t} = \mathbb{A} \underset{\sim}{a} e^{\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{A}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}$$

Egenvärdes-problem!

Egenvärdena λ kallas <u>kritiska exponenter</u>

Villkor för stabilitet: $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \quad \forall \lambda$

Stabilitet hos snurra

Antag principalsystem och $I_1 < I_2 < I_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^1 = -\dfrac{I_3 - I_2}{I_1} x^2 x^3 & \text{neg koeff} \\ \dot{x}^2 = +\dfrac{I_3 - I_1}{I_2} x^3 x^1 & \text{pos koeff} \\ \dot{x}^3 = -\dfrac{I_2 - I_1}{I_3} x^1 x^2 & \text{neg koeff} \end{cases}$$

Kritiska punkter:

$$\underset{\sim}{x}_0^{(1)} = (\omega, 0, 0) \qquad \underset{\sim}{x}_0^{(2)} = (0, \omega, 0) \qquad \underset{\sim}{x}^{(3)} = (0, 0, \omega)$$

Sätt

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0^{(i)}$$

För $\underset{\sim}{x}_0^{(1)}$ får vi:

$$\dot{\underset{\sim}{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 \\ \dot{y}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \dfrac{I_3 - I_1}{I_2} \\ 0 & -\omega \dfrac{I_2 - I_1}{I_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \mathbb{A} \underset{\sim}{y}$$

Få egenvärdena λ genom att lösa

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \mathbb{A}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(1)} = 0 \quad ; \quad \lambda_2^{(1)} = -\lambda_3^{(1)} = i\omega \sqrt{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)/I_1 I_3}$$

pss. för $\underset{\sim}{x}_0^{(2)}$ och $\underset{\sim}{x}_0^{(3)}$

$$\lambda_1^{(2)} = 0 \quad ; \quad \lambda_2^{(2)} = -\lambda_3^{(2)} = \omega \sqrt{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)/I_1 I_3}$$

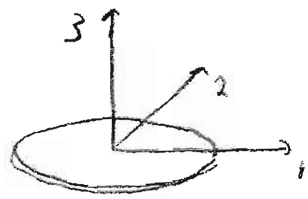
$$\lambda_1^{(3)} = 0 \quad ; \quad \lambda_2^{(3)} = -\lambda_3^{(3)} = i\omega \sqrt{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)/I_1 I_2}$$

$$\mathbb{R}e(\lambda_2^{(2)}) > 0 \Rightarrow \text{instabil}$$

ii/ $I_1 = I_2 \neq I_3$ $\qquad I_1 \neq 0, \; I_3 \neq 0$

"Den symmetriska snurran"

Tex. tunn cirkulär skiva



$$I_3 \dot{\omega}_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3' = \text{konstant}$$

Def: $\omega_0 = \omega_3' \dfrac{I_3 - I_1}{I_1} = \text{konst}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1' = -\omega_0 \omega_2' \\ \dot{\omega}_2' = \omega_0 \omega_1' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_1'(t) &= \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau) \\ \omega_2'(t) &= \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau) \end{aligned}$$

$\omega_\perp$ & τ är integrationskonstanter

$$\Rightarrow \quad \bar{\omega} = (\omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau), \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau), \omega_3')$$

$$\bar{\omega}^2 = \omega_\perp^2 + \omega_3'^2 = \text{konstant}$$

$\bar{\omega}$ har konstant längd och roterar runt 3-axeln

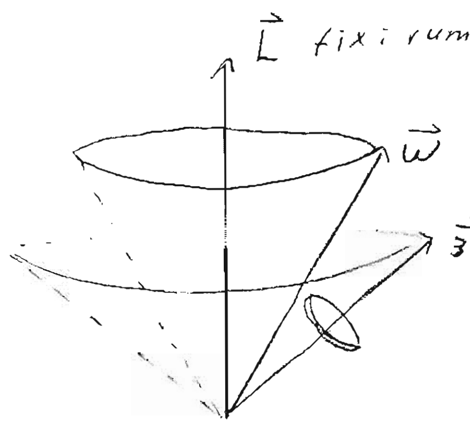
Rörelsemängdsmomentet <u>m.a.p. det roterande systemet K</u> är

$$\begin{cases} \bar{L}_1 = I_1 \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau) \\ \bar{L}_2 = I_1 \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau) \\ \bar{L}_3 = I_3 \omega_3' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{L}^2 = I_1^2 \omega_\perp^2 + I_3 \omega_3'^2 = \text{konst}$$

$\bar{L}$ & $\bar{\omega}$ roterar runt 3-axeln i K'

Gå nu tillbaka till systemet K^0 med axlar fixa i rummet.

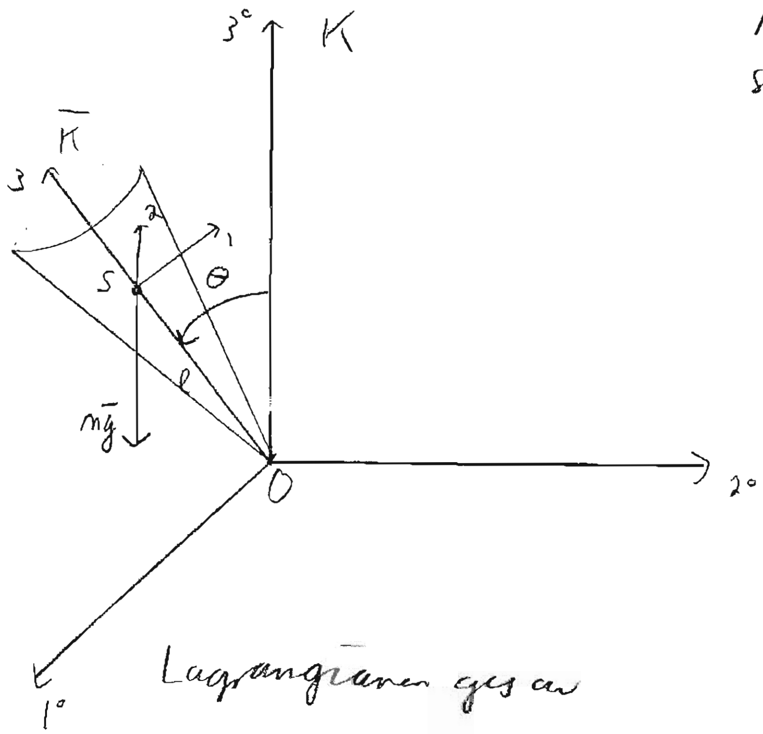


Regulјär precession med vinkel-frekvens ω_0

Period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Exempel! (s124)

Symmetrisk snurra i gravitationsfält



Antag att snurran är symmetrisk runt 3-axeln:

$I_1 = I_2$

Välj S i masscentrum.

Lagrangianen ges av

$$L = \frac{1}{2} M\bar{V}^2 + T_{rot} - \underbrace{U(\bar{r}_s)}$$

I homogent grav. fält kan vi skriva så!

Exempel: Jorden som symmetrisk snurra

Jorden är något tillplattad vid polerna och har rotationsaxeln förskjuten 0.2" relativt symmetriaxeln.

$$\Rightarrow \quad I_1 = I_2 < I_3$$

med

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \frac{1}{300}$$

Perioden ges av

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi I_1}{(I_3 - I_1)\omega_3'}$$

Sätt in $\frac{2\pi}{\omega_3'} = 1$ day

$$\Rightarrow \quad T = 300 \text{ dagar}$$

Experimentellt: 430 dagar

Skillnaden beror på att jorden ej är en stel kropp och att yttre kraftmoment verkar på den.

Vi kan nu uttrycka S hastighet, $\overline{V}$ som

$$\overline{V} = \dot{\overline{r}}_s = \overline{\omega} \times \overline{r}_s = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 & \overline{\omega}_3 \\ 0 & 0 & l \end{vmatrix} = \hat{1}\,\omega_2' l - \hat{2}\,\omega_1 l$$

där vi har uttryckt $\overline{r}$ i vårt roterande system K'

$$\Rightarrow \overline{V}^2 = l^2(\omega_1'^2 + \omega_2'^2) \Rightarrow \frac{1}{2} M \overline{V}^2 = \frac{1}{2} M l^2 (\omega_1'^2 + \omega_2'^2)$$

K' är ett principalsystem (pga symmetrin) $\Rightarrow$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} I_i \overline{\omega}_i^2 = \frac{1}{2} I_1 (\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \overline{\omega}_3^2$$

Potentialen kan skrivas

$$U(\overline{r}_s) = Mgl\cos\theta$$

Utnyttja nu Eulervinklarna

$$\begin{cases} \omega_1' = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2' = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3' = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 -$$

$$- Mgl\cos\theta$$

ϕ & ψ cykliska $\Rightarrow$

$$\begin{cases} p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \left\{ (I_1 + Ml^2)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta \right\}\dot\phi + I_3\dot\psi\cos\theta = \text{konst.} \\ p_\psi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \text{konst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot\phi = \dfrac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{(I_1 + Ml^2)\sin^2\theta} \\ \dot\psi = \dfrac{p_\psi}{I_3} - \dot\phi\cos\theta \end{cases}$$

ϕ - rot kring 3^0-axeln

ψ - rot kring 3-axeln

Energin (= H ty L på sin naturliga form) ges av

$$E = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 + Mgl\cos\theta = \text{konst.}$$

Sätt in uttrycken för $\dot\phi$ & $\dot\psi$ i E!

Def: $E' = E - \dfrac{p_\psi^2}{2I_3} - Mgl = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E' = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)\dot\theta^2 + U_{eff}(\theta) & (*) \\ U_{eff}(\theta) = \dfrac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2(I_1 + Ml^2)\sin^2\theta} - Mgl(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

$\dot\theta^2 \geq 0 \Rightarrow E' > U_{eff}(\theta)$

Ger möjligt område för rörelsen!

Hur ser rörelsen ut?

Notera att $U_{eff}(\theta) \to \infty$ då $\theta \to 0$ (och $\theta \to \pi$)

Def: $u(t) = \cos\theta(t)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1-u^2}$$

Sätt in i (*)

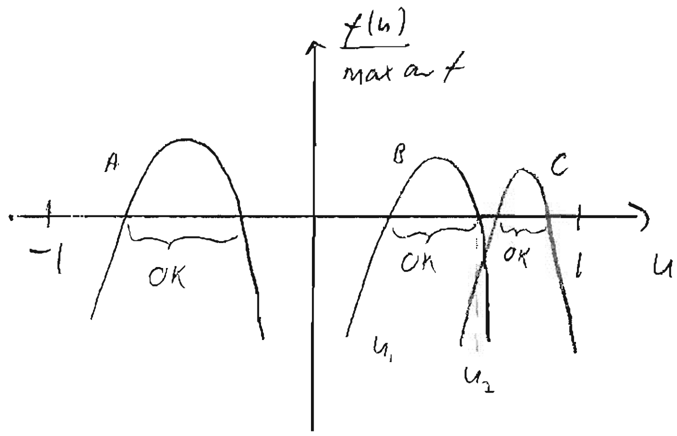
$$\Rightarrow \dot{u}^2 = f(u) \leftarrow \text{beror av } E',\ p_\phi,\ p_\psi$$

med

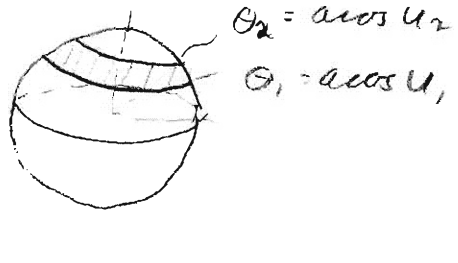
$$f(u) = (1-u^2)\left[\frac{2E'}{I_1+Ml^2} + 2Mgl\,\frac{1-u}{I_1+Ml^2}\right] - \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{(I_1+Ml^2)^2}$$

$u \in [-1,1]$

$$E' > U_{eff}(\theta) \Rightarrow f(u) > 0$$



u rör sig mellan u_1 & u_2, vilket är ett band på en sfär



$u_1 < u_2$

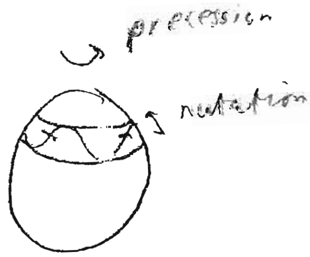
Def $u_0 = \dfrac{p_\phi}{p_\psi}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\psi}{(I_1 + Ml^2)} \, \frac{u_0 - u}{1 - u^2}$$

Tre fall

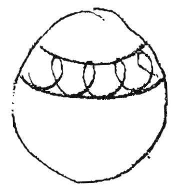
i) $u_0 > u_2$ (or $u_0 < u_1$)

$\Rightarrow$ $\dot{\phi}$ har alltid samma tecken



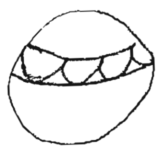
ii) $u_1 < u_0 < u_2$

$\Rightarrow$ $\dot{\phi}$ har olika tecken vid u_1 & u_2



iii) $u_0 = u_1$ eller $u_0 = u_2$

$\Rightarrow$ $\dot{\phi} = 0$ vid u_1 eller u_2



Denna rörelse kallas nutation.

Anm: Vi har sett tidigare att med vinkla som generaliserade koordinater så är våra kanoniska impulser rörelsemängdsmoment.
I vårt fall har vi

$$\begin{cases} P_\psi = L_3' & \text{– rörelsemängdsmomentets 3-komponent m.a.p. S} \\ P_\phi = L_3 & \text{– rörelsemängdsmomentets 3-komponent m.a.p. O} \end{cases}$$

(se s. 201 i Scheck!)